爱德华·J.巴尔博　默里·S.克拉姆金　威廉·O.J.莫泽 著
王继延　林磊　韩士安 译

给数学迷的500个挑战性问题

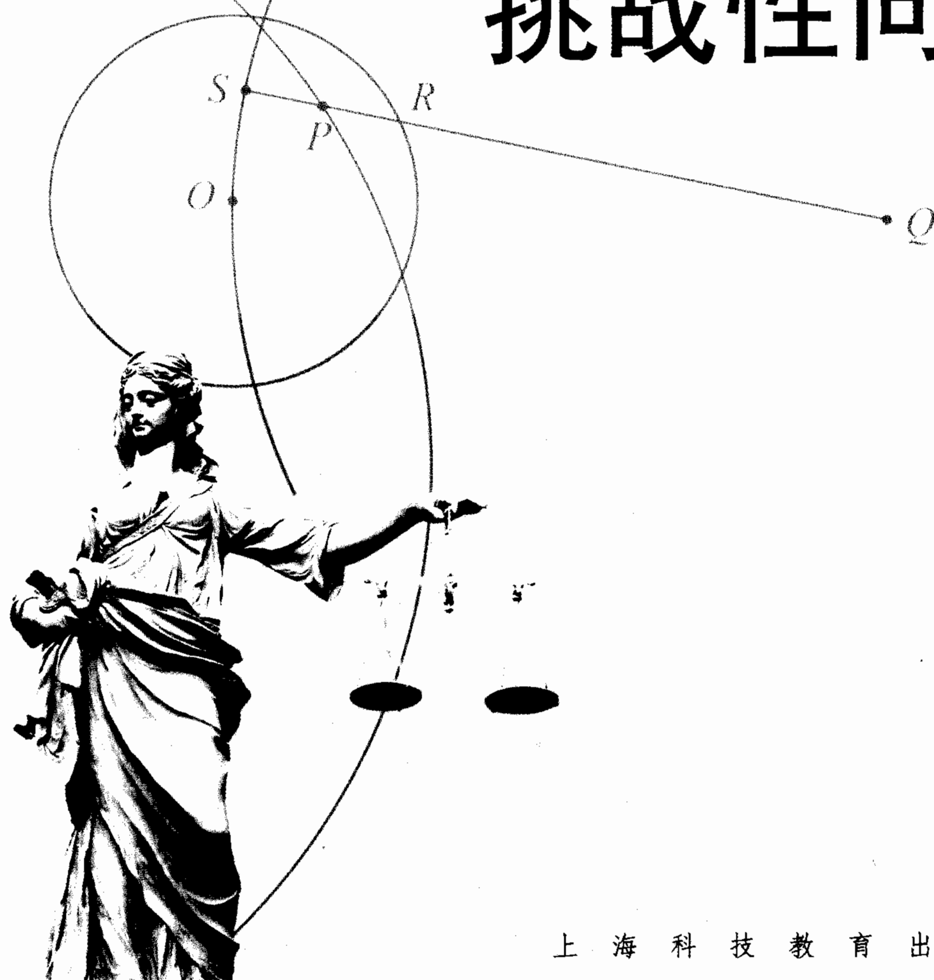
Five Hundred Mathematical Challenges



上海科技教育出版社

爱德华·J.巴尔博　默里·S.克拉姆金　威廉·O.J.莫泽　著
王继延　林磊　韩士安　译

给数学迷的500个挑战性问题



上　海　科　技　教　育　出　版　社

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

内 容 简 介

这本书包含500个数学问题，它们涉及高中数学的广泛领域以及各种难度层次。其中有一些是简单的数学问题，还有一些是数学奥赛水平的难题。不管你对数学的爱好是深是浅，也不管你的数学能力是高是低，你都能从这本书中获得乐趣与帮助。书中对许多问题提供了不止一种解法，这能让你了解如何以不同的思路处理同一个问题，并比较所运用的不同工具的优美性和有效性。

大专院校和高中的教师会发现这本书非常有用，你可以用它来激励学生，也可以用来自我消遣。书中有些问题，展示了一些基本技巧的威力，可以用来在平时的上课中增添趣味。

这些问题大约在30年前就以一套小册子的形式首次发表，当时这类问题的来源很少。它们经历了时间的考验，对它们的需求也一直很稳定。把这些问题合并成一本书出版，可说是众望所归。

这本问题集还为希望参加数学奥赛的学生提供了一个坚实的基础。你们可以从容易的问题做起，逐步过渡到要求更高的问题。书中特别提供的数学工具箱汇总了奥赛水平的学生需要用到的结论与方法。

目录



PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

序　言

这本问题集面向高中以及大专院校的学生。某些问题是容易的，只需要一些常识和明晰的推理即可解决。另一些可能需要用到我们在工具箱中列出的结论与方法。没有一个问题需要用到微积分知识，因此这本问题集可以描述为“前微积分数学中的问题”。然而，它们明显不同于教科书中的普通习题，或所谓的操练题，它们是具有挑战性的，饶有趣味的，可以激发思维的，也是迷人的。许多问题具有真正数学的“素材”，事实上有少数是研究性问题的最为简单的情形，因此它们可以让读者体会一下数学研究是怎么回事。

这本问题集奉献给这样的学生：他们愿意与一个个初看似无从着手的问题“搏斗”，并最终征服它们，从而觉得其乐无穷。这本问题集也献给这样的教师：他们愿意把自己学生的水平提高到由那些事先人工编制的习题所保证的基本水平以上，从而让他们体验到数学的创造性方面。教师可以从本书中找到让有数学才能的学生受到挑战的问题，而这些问题往往会在数学兴趣小组或数学竞赛培训班中出现。寻求问题的解答可能需要一种集体的经验，因为往往是个人努力无法奏效，而合作研究却会带来成功。

在你对一个问题取得辉煌胜利或完全败下阵来之前，不要去翻看本书的解答。我们所提供的解答并不是标准答案，然而它们提供了探索类似问题的可能方法。一个特定的问题可能会以几种不同的方式解决，这体现了不同的思路，展示了不同的方面。有些解答可能是简单而直接的，而另一些则可能是复杂而巧妙的。正因为这样，我们经常提供不止一种解答。也许你还会发现其他的解答。

这些问题中有许多对你而言很可能是全新的，但我们对大多数问题没有发明权。我们对那些默默无闻的问题原创者表示感谢，因为我们知道：创作一个有趣的、挑战性的、启发性的和可解的，而不是不可解的或解答起来很繁琐的问题是多么的艰苦。除了少数例外，这些问题出自由加拿大数学学会提供的一套5本小册子。事实上，其中第一本小册子出版于1973年。从那时起，它们的销售一直很稳定。现在我们感到需要编辑一本将这5本小册子合在一起的修订本。这本书中的问题没有特意按难易程度或科目内容编排。我们欢迎读者来函，提出批评、纠正，以及提供另外的解答方法，并推荐问题。

收集、创作问题并对它们进行编辑，对我们来说是一种有益的学习经历。如果教师和学生发现这本书是有用的、有趣的，我们将十分欣慰。

E. 巴尔博，M. 克拉姆金，W. 莫泽

问题

问题 1 假设一个直角三角形的三边的长度恰为某个等差数列的三个连续项，证明：这三边的长度之比为 3∶4∶5.

问题 2 对于任意的一个端点位于直线 $y=x$ 上，另一个端点位于直线 $y=2x$ 上，且长度为 4 的线段，试求出其中点的轨迹方程.

问题 3 如图 1 所示，一个矩形被一些线段分割成若干块，其中有些线段的长度已知. 如果这些小块可以拼成一个正方形，那么这个正方形的周长为多少？

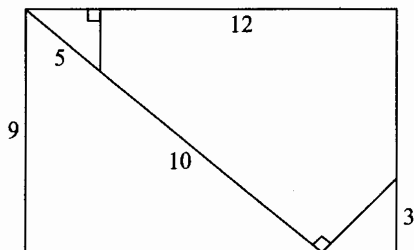


图 1

问题 4 观察以下各式：

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2.$$

试根据上述各式，写出一个一般的形式，并加以证明.

问题 5 计算下列式子的和：

$$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}6}\quad(n\geqslant1).$$

问题 6 艾丽斯、贝蒂和卡罗尔参加了同样的一系列测试. 在每一项测试中，三人的成绩均为两两相异的正整数 x,y,z. 每人所得的成绩总和如下：艾丽斯，20；贝蒂，10；卡罗尔，9. 若贝蒂在代数测试中名列第一，那么几何测试中谁列第二位？

问题 7 记 $f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_n(x)=f_0(f_{n-1}(x))\quad(n=1,2,3,4,\cdots)$，试计算 $f_{1976}(1976)$.

问题 8 证明：在任意五个整数（不一定相异）中，一定可以选出三个，其和能被 3 整除.

问题 9 史密斯先生每天一成不变地搭乘同一班火车下班，到达目的车站的时间总是下午 5 点. 那时他的私人司机会准时到达，并立刻带他回家. 一个晴朗的下午，史密斯先生搭乘了较早的火车，到达目的车站的时间是下午 4 点. 他没有给司机去电话，也没有在车站等到 5 点，而是选择步行回家. 在路上，他遇见了司机，并上车回到家里，发现较平时提早了 20 分钟. 几个星期后，又是一个好天，史密斯先生又搭乘了较早的火车，这次到达目的车站的时间是下午 4 点半. 他再次选择步行，在路上遇见了司机，并上车回家. 试问：这次会比平时提早多少分钟到家？

问题 10 假设一个空水罐的重心位于罐的内底面上方. 现将水灌入，直到盛有水的水罐的重心取得最低的位置. 请解释为什么这个极端位置恰好位于水的表面.

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 11 父母和儿子三人决定举行一次特别的家庭棋类比赛，两两对下，每盘必须有一方胜出(就是说，没有“和棋”的可能)．每盘比赛后，胜者继续和另一位刚才没参加上盘比赛的人比赛．第一个胜得两盘(不一定连续)的为最后的胜利者．出自对长者的尊重，父亲有权在比赛开始时，选择第一盘就进行比赛或者坐等第一盘结束再进行比赛．你认为父亲应该采取哪一种方案为好？(USAMO 1974)

问题 12 如图 2 所示，$EFGH$ 是四边形 $ABCD$ 的内接正方形，若 $\overline{EB}=\overline{FC}=\overline{GD}=\overline{HA}$，证明：四边形 $ABCD$ 也是一个正方形．

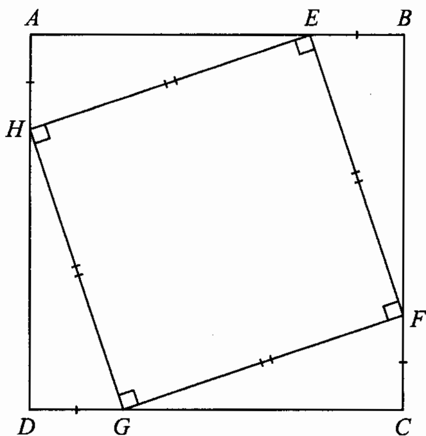


图 2

问题 13 证明：在任意 7 个两两不等的不大于 126 的正整数中，总可以找出两个数 x 和 y，满足不等式 $1<\dfrac{y}{x}\leqslant 2$.

问题 14 证明：在边长为 1 的正方形内部或边上的任意 5 个点中，总存在两点，它们的距离不大于$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

问题 15 在一次竞选活动中，参与竞选的各个政治团体一共作出了 n 种不同承诺($n>0$)．没有两个政治团体的承诺是完全一样的，但几个政治团体会有一些共同的承诺，且每两个政治团体之间至少有一个承诺是相同的．试证明：有且只有 2^{n-1} 个政治团体参与了这次竞选．

问题 16 现有一个四角为黑色方格的$(2m+1)\times(2n+1)$的棋盘(红黑相间)，证明：若删去任意一个红色的方格和任意两个黑色的方格，留下的棋盘一定可以被多米诺骨牌(即 1×2 的矩形)所覆盖．

问题 17 正整数 n 的数字和 $D(n)$有以下递归定义，即

$$D(n)=\begin{cases} n & (1\leqslant n\leqslant 9), \\ D(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m) & (n>9), \end{cases}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 为以十进制表示的正整数 n 的各位数字，即

$$n=a_m 10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_1 10+a_0.$$

例如 $D(989)=D(26)=D(8)=8$.
证明：$D((1234)n)=D(n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

问题 18 给定三点 A、B、C，试构造一个以 A 为中心的正方形，使其相邻的两边(或它们的延长线)分别过点 B 和点 C.

问题 19 用初等方法给出如下不等式的证明：

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \quad (n=7,8,9,\cdots).$$

问题 20 如图 3，在圆 O 内，OXY 垂直于弦 AB．试证明：在图 4 中$\overline{DX}\leqslant\overline{CY}$.(埃尔德什与克拉姆金)

问题 21 证明：对于 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，必存在某些 $i,k(1\leqslant i\leqslant i+k\leqslant n)$，使得 $a_i+\cdots+a_{i+k}$能被 n 整除．

问题 22 给定平面上两两距离相异的有限

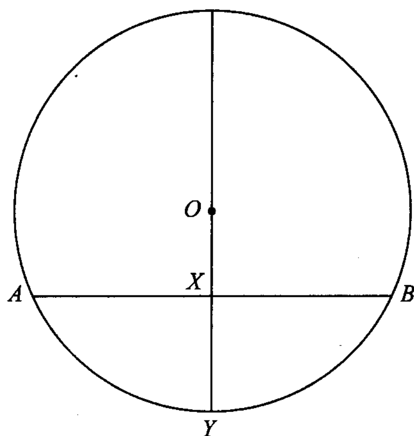


图 3

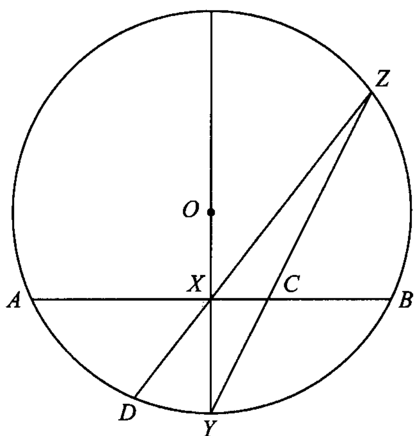


图 4

多个点，用直线段联结每一点和离它距离最短的点．证明：最终所得到的图形中不存在三角形．

问题 23 证明：若 m 是正有理数，那么 $m+\frac{1}{m}$ 为整数的充分必要条件是 $m=1$．

问题 24 如图 5，以直角$\triangle ABC$ 的斜边 AC 为一边，向外作正方形，记 P 为该正方形的中心．证明：BP 为$\angle ABC$ 的角平分线．

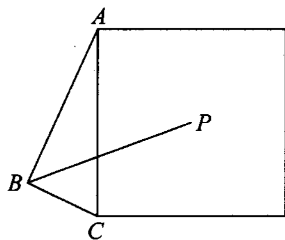


图 5

问题 25 已知 l_1、l_2、l_3、l_4 为同一平面上互不重合的四条直线，且 l_1、l_2 分别平行于 l_3、l_4．试找出到这四条直线的垂直距离的和为常数的动点的轨迹．

问题 26 假定同一平面上有不共线的五个点，且任意四点都不共圆．证明：存在过其中三点的一个圆，使得另外两点中，一点在圆内，一点在圆外．

问题 27 已知点 P 为任意$\triangle ABC$ 内的一点，分别记 d_1、d_2、d_3 为点 P 到边 BC、CA、AB 的距离，又分别记 h_1、h_2、h_3 为三角形过顶点 A、B、C 的高线长．证明：

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1.$$

问题 28 在一条笔直的公路边上有 n 个房间，每个房间里都住着一个男孩．试问：在公路上的哪一点会面，每个男孩由各自居住的房间到会面地点的距离之和为最小？

问题 29 记点 P 为已知相交两圆的一个交点，试过点 P 作一条不包含公共弦的直线 l，使其被两圆截出长度相等的两条线段．

问题 30 如图 6，由已知$\triangle ABC$ 的各边分别向外作正三角形．证明：$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}$．

问题 31 若 n 为大于 1 的正整数，证明：

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

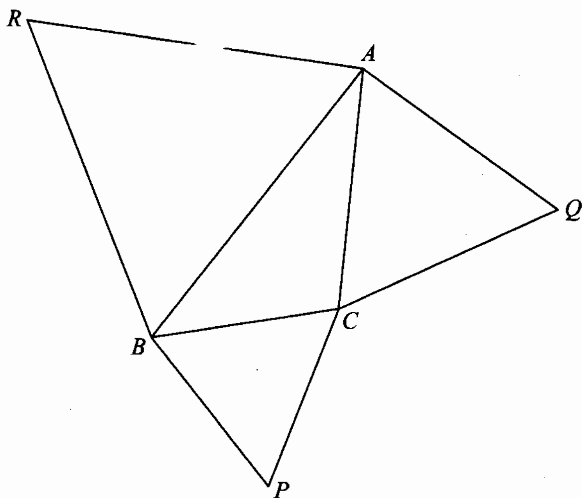


图 6

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

一定不是整数.

问题 32 已知半径为 1 的球面上的两点被一条位于球内的长度小于 2 的圆弧所联结,证明:该圆弧一定位于所给球面的某个半球面上.(USAMO 1974)

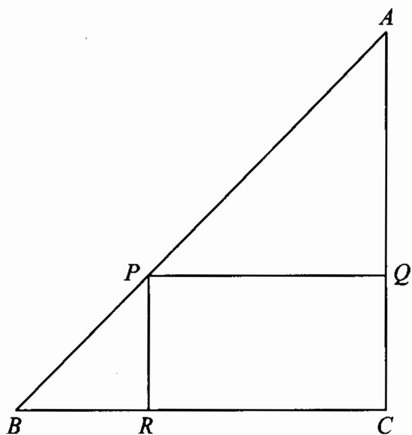
问题 33 证明:对于任意正整数 n,有

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right].$$

问题 34 证明:所有 n 位($n>2$)正整数的和为

$$49\underbrace{499\cdots9}_{n-3\text{个}9}55\underbrace{00\cdots0}_{n-2\text{个}0}.$$

问题 35 如图 7,已知腰长为 1 的等腰直角$\triangle ABC$,点 P 位于斜边上,点 Q、R 分别为点 P 到两直角边的垂线的垂足. 试证明:无论点 P 的位置如何,$\triangle APQ$、$\triangle PBR$ 和矩形 $QCRP$ 三者面积的最大值至少为$\frac{2}{9}$.



$\overline{BC}=\overline{CA}=1$

图 7

问题 36 证明:三边长分别为 5、5、6 的三角形的面积恰好和三边长分别为 5、5、8 的三角形的面积相等. 试再写出一对三边长为整数,且面积相等的相异的等腰三角形.

问题 37 一个四边形的各个顶点分别位于边长为 1 的正方形四边,证明:该四边形的各边长度 a、b、c、d 满足不等式

$$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4.$$

问题 38 如图 8,半径分别为 r、$R(R>r)$的两圆相交,试求出图中两圆不重叠部分的面积之差的表达式.

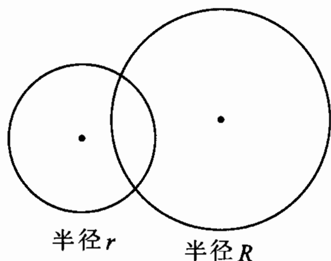


图 8

问题 39 将数字 3 表达成一个或几个正整数的有序和的形式,一共有 4 种,分别为:

3,　1+2,　2+1,　1+1+1.
证明:将正整数 n 以如此形式表达,一共可以有 2^{n-1} 种形式.

问题 40　某次竞赛有 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 等 n 个队参加,每个队仅和其他各队比赛一次.每次比赛一定分出输赢,无平局,赢一次得 1 分.分别记 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 队的总分.证明:对于 $1<k<n$,

$$S_1+S_2+\cdots+S_k\leqslant nk-\frac{1}{2}k(k+1).$$

问题 41　观察以下各式:

$$1^2=\frac{1\times2\times3}{6},$$

$$1^2+3^2=\frac{3\times4\times5}{6},$$

$$1^2+3^2+5^2=\frac{5\times6\times7}{6}.$$

由此猜想一般规律,并加以证明.

问题 42　以下问题不得借助数学用表、计算器等工具来完成.

(1) 证明:满足 $x=\frac{x^2+1}{198}$ 的 x 的值介于 $\frac{1}{198}$ 和 197.99494949…之间;

(2) 利用(1)的结果,证明:$\sqrt{2}<$ 1.41421356421356421356…;

(3) $\sqrt{2}$ 小于 1.41421356 吗?

问题 43　证明:若 5 根针投掷到边长为 2 的等边三角形卡纸上,那么一定存在两根针,它们投得的针点的距离不大于 1.

问题 44　给定同一平面上的偶数个点,是否存在一条直线,使得这偶数个点在直线的两侧恰好各半?

问题 45　如图 9,两圆相交于 A、B 两点,线段 PQ 过点 A,且与两圆分别另交于点 P 和点 Q.证明:对于线段 PQ 的一切可能出现的情况,$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ 为常数.

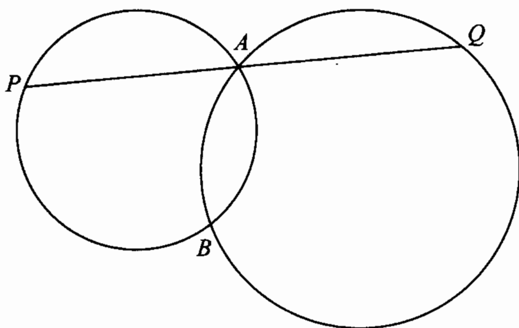


图 9

问题 46　记 $f(n)$ 为如下数列的前 n 项的和:$0,1,1,2,2,3,3,4,4,\cdots,r,r,r+1,r+1,\cdots$.

(1) 导出 $f(n)$ 的表达式;

(2) 证明:当 s 和 t 为正整数,且 $s>t$ 时,$f(s+t)-f(s-t)=st$.

问题 47　已知不在同一直线上的 P、Q、R 三点,试作一三角形,使 P、Q、R 恰为此三角形三边的中点.

问题 48　证明:$1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}+5^{99}$ 能被 5 整除.

问题 49　证明:不存在整数 a、b、c,使得 $a^2+b^2-8c=6$.

问题 50　若 a、b、c、d 为两两相异的 4 个数,那么每次取两个数相加,能形成 6 种和式:

$$a+b,a+c,a+d,b+c,b+d,c+d.$$

将整数 1,2,3,4,5,6,7,8 平分成两个集合,使得一个集合中的 4 个数以上述方法所得的 6 个和,恰好与另一个集合所得的各个和一样(顺序不必相同).试列出所有可能的分拆法.

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

问题 51 如果 $2\ln(x-2y)=\ln x+\ln y$，求$\frac{x}{y}$.

问题 52 设函数 f 满足如下性质：

(a) 对每个正整数 n，$f(n)$均有定义；

(b) $f(n)$是整数；

(c) $f(2)=2$；

(d) 对任意 m 和 n，有

$$f(mn)=f(m)f(n);$$

(e) 如果 $m>n$，则 $f(m)>f(n)$.

证明：$f(n)=n$，$n=1,2,3,\cdots$.

问题 53 如果空间中一直线 l 与平面 π 中三条给定的直线构成相同的夹角，证明：l 与平面 π 垂直.

问题 54 设整数 a 具有如下形式

$$a=\underbrace{11\cdots1}_{m个1},$$

又设

$$b=1\underbrace{00\cdots0}_{m-1个0}5,$$

证明：$ab+1$ 是一个完全平方数，并用题中所给的 a 和 b 那样的形式来表示 $ab+1$ 的平方根.

问题 55 在水平面上相距 $2a$ 单位有两杆高分别为 h 和 k 的旗. 求该平面上关于这两个旗杆顶的仰角相等的所有点的集合.

问题 56 证明：对于 $n=1,2,3,\cdots$，有

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3.$$

问题 57 设 X 是凸四边形 $ABCD$ 的边 BC 上(在 B 与 C 之间)的任意点(见图 10). 设过 B 且平行于 AX 的直线与过 C 且平行于 DX 的直线交于点 P. 证明：$\triangle APD$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积.

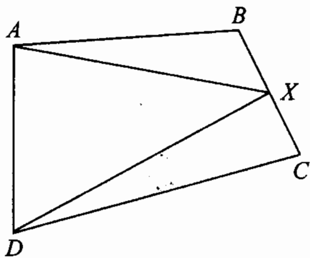


图 10

问题 58 设

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

证明：$2\sqrt{n+1}-2<s_n<2\sqrt{n}-1$.

问题 59 证明：对于任何内接于单位圆内的四边形，其最短边的长度不大于$\sqrt{2}$.

问题 60 证明：如果一个凸多边形有四个内角等于 90°，那么它一定是一个矩形.

问题 61 有 6 个大小相同的小球，其中两个红色、两个白色、两个蓝色. 已知每种颜色的球中有一个重 15 克，另一个重 16 克. 用天平秤称两次，确定哪三个球是 16 克的.

问题 62 一架飞机以常速从 A 点飞到 B 点再返回，不考虑拐弯所花的时间. 如果这期间有一股常速的风从 A 吹向 B，飞机的飞行时间会比在静止气流中花得更多吗？(这与你的直觉一致吗？)

问题 63 如果四面体 $OABC$ 的三条棱 OA、OB、OC 两两垂直，证明：$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

问题 64 求所有三元数组(x,y,z)，使得这三个数中的任意一个数加上另两个数的积，所得结果都是 2.

问题 65 设单位正方形内有 9 个点. 证明：存在一个面积至多是$\frac{1}{8}$的三角形，其顶点是这 9 个点中的 3 个点.（参见问题 14 或 43.）

问题 66 设 a、b、c 是某三角形的三边长. 证明：如果 $a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$，那么该三角形是等边三角形.

问题 67 设三角形的三边长为 a、b、c，其对应的三条高的长分别为 h_a、h_b、h_c. 如果 $a\geqslant b\geqslant c$，证明：$a+h_a\geqslant b+h_b\geqslant c+h_c$.

问题 68 设 n 是个五位数（它的第一位非零），而 m 是通过将 n 的中间位删去而形成的四位数. 求出使$\frac{n}{m}$为整数的所有 n.

问题 69 证明：对于非零数 x、y、z，如果 $n=-1$ 时，表达式

$$x^n+y^n+z^n \text{ 和 } (x+y+z)^n$$

相等，那么对任何奇整数 n，它们也相等.

问题 70 某军队指挥官希望安排一个哨兵，使得他到两个指定点及到一条笔直公路的距离相等. 这件事肯定办得到吗？试确定所有可能的位置. 换言之，在欧几里得平面中，到两个给定点及一给定直线的距离相等的点有多少个？可能的话，用圆规直尺求之.

问题 71 证明：对于 $n=1,2,3,\cdots$，

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\left[\frac{n+8}{16}\right]+\cdots=n.$$

问题 72 设 A、B、C 是不共线的任意三点. 构造一个中心为 C 的圆，使得点 A 到该圆的某一条切线与点 B 到该圆的某一条切线平行.

问题 73 设

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

求用 $f(x)$除 $f(x^5)$所得的余式.

问题 74 设多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是整数. 如果存在四个不同的整数 a、b、c、d，使得 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5$，证明：不存在整数 k，使得 $f(k)=8$.

问题 75 给定一个 $n\times n$ 的正整数数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

设 m_j 是第 j 列中的最小数，m 是这些 m_j 中的最大数. 又设 M_i 是第 i 行中的最大数，M 是这些 M_i 中的最小数. 证明：$m\leqslant M$.

问题 76 设有一个公比大于 1 的等比数列，且其每项均为 100 至 1000 之间（包括两头）的整数. 求这种数列的最大项数.

问题 77 证明：对每个正整数 n，$1^n+8^n-3^n-6^n$ 能被 10 整除.

问题 78 在一个圆的圆周上取定 n 个点，并画出由这些点所确定的弦. 假如任何三弦都不共点（顶点除外），问：顶点落在该圆内的三角形共有多少？（图 11 显示了 6 个顶点时的情况，以及这样的一个三角形.）

问题 79 整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$可用如下递推公式定义：$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，且 $a_1=2$. 该数列的前几项为：$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=7$，$a_4=43$，$a_5=1807$. 证明：整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots$是两两互素的.

问题 80 证明：可以取足够大的整数 N，使

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

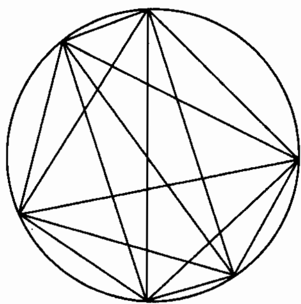


图 11

得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$大于 100.

问题 81 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个正实数. 证明：

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$$

及

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\geqslant n$$

中必有一个成立.

问题 82 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个 $n\geqslant1$ 次的整系数多项式. 证明:存在无限多个正整数 m,使得

$$f(m)=a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a_0$$

不是素数.

问题 83 图 12 显示了 3 条直线可将平面分割成 7 个区域. 求用 n 条直线将平面分割成不同区域的最大个数.

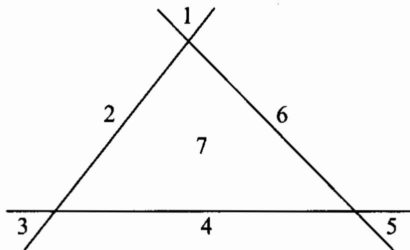


图 12

问题 84 在某个小镇上，每个街区都呈矩形,所有街道(忽略宽度)不是东西走向的,就是南北走向的. 某人想从一个路口向东过 m 个街区,向北过 n 个街区,到达另一个路口,最短的路线有多少条?

问题 85 给定六个数,它们满足以下关系式：

(a) $y^2+yz+z^2=a^2$;

(b) $z^2+zx+x^2=b^2$;

(c) $x^2+xy+y^2=c^2$.

用 a、b、c 来表示和式 $x+y+z$. 如果这些数都是正数，试给出一个几何解释.

问题 86 假设空间中有 6 个点,且任意三点不共线. 每两点间连一线段,共有 15 条这样的线段. 然后将它们着色,有些着红色,另一些着蓝色. 证明:存在用这些线段构成的三角形,且三角形的所有边着相同的颜色.

某学生在一本代数教科书的扉页上写了下面这个救世妙方：

如果又有一场洪水滔天，

这儿就是理想的避难客店。

即使全世界都被水淹，

这本书上仍然是干巴巴一片。

问题 87 将数字 1 表示为有限多个不同的大于等于 2 的整数的倒数之和. 问:这样的表示法唯一吗? 如果不唯一,共有多少种?

问题 88 如何用圆规直尺将一个圆划分成 9 个面积相同的区域?

问题 89 在平面上任意给定 n 个点. 对于这些点的任何一个排列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,都确定了一条路线:沿直线段从 P_1 到 P_2,然后从 P_2 到 P_3,……,最后终止于 P_{n-1} 到 P_n 的直线段. 证明:这样的折线段路线中的最短者一定不会自相交.

问题 90 设 $P(x,y)$ 是关于 x 和 y 的多项式,使得

(a) $P(x,y)$ 是对称的,即
$$P(x,y)\equiv P(y,x);$$

(b) $x-y$ 是 $P(x,y)$ 的因式,即
$$P(x,y)\equiv(x-y)Q(x,y).$$

证明:$(x-y)^2$ 一定是 $P(x,y)$ 的因式.

问题 91 图 13 所示是一个 9 个顶点的(凸)多边形. 图中所画的 6 条对角线将该多边形分成了 7 个三角形:$\triangle P_0P_1P_3$、$\triangle P_0P_3P_6$、$\triangle P_0P_6P_7$、$\triangle P_0P_7P_8$、$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_3P_4P_6$、$\triangle P_4P_5P_6$. 对这些三角形用 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、$\triangle_4$、$\triangle_5$、$\triangle_6$、$\triangle_7$ 来标号,共有多少种方法可使 P_i 必定是 $\triangle_i$ 的顶点($i=1,2,3,4,5,6,7$)? 验证你的结论.

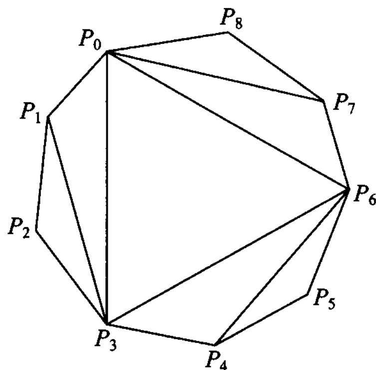


图 13

问题 92 在图 14 中,点 O 是圆的中心,PQ 是直径,点 R 是由点 P 向点 T 处圆的切线所作垂线的垂足,点 S 是由点 Q 向同一切线所作垂线的垂足. 证明:$\overline{OR}=\overline{OS}$.

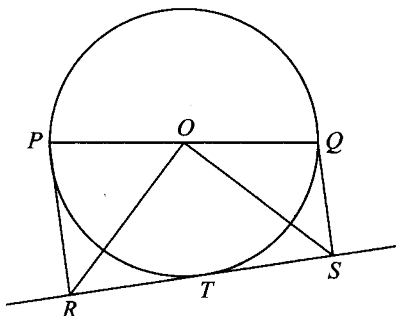


图 14

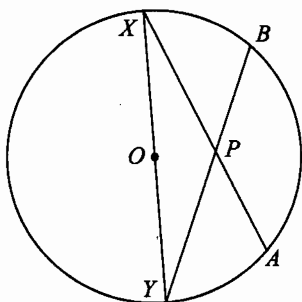
问题 93 设 n 是正整数,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意$\geqslant 1$ 的实数. 证明:
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$
$$\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

问题 94 如图 15,A 和 B 是给定圆上的固定点,且 A、B 不与该圆的中心 O 共线. 而 XY 是一可变的直径,求过 A 和 X 的直线与过 B 和 Y 的直线的交点 P 的轨迹.

问题 95 观察:
$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};$$
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};\quad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

由这些例子总结出一个一般的规律,并予以证明. 证明对于任何大于 1 的整数 n,存在正整数 i 和 j,使得
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+$$

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com



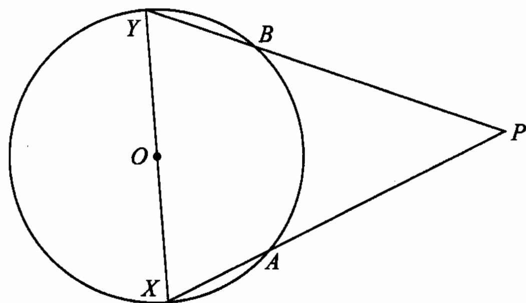


图 15

$$\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$

(*American Mathematical Monthly* 55 (1948): 427, 问题 E827.)

问题 96 约翰抛了6枚均匀的硬币,玛丽抛了5枚均匀的硬币. 问:约翰抛出的硬币中,得到正面的次数比玛丽的多的概率是多少?

问题 97 设 n 是给定的正整数,对任意 n 个满足 $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$ 的实数 x_i 可对应于如下的和:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|x_i-x_j| = |x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_1-x_4|+\cdots+|x_1-x_{n-1}|+|x_1-x_n|\\ +|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+\cdots+|x_2-x_{n-1}|+|x_2-x_n|\\ +|x_3-x_4|+\cdots+|x_3-x_{n-1}|+|x_3-x_n|\\ +\cdots\\ +|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|\\ +|x_{n-1}-x_n|.\end{aligned}$$

记 $S(n)$为这一和的可能的最大值,求 $S(n)$.

问题 98 观察

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\qquad 4^2+3^2=5^2,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15},\qquad 8^2+15^2=17^2,$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35},\qquad 12^2+35^2=37^2.$$

根据上述例子,试确定其一般规律,并证明.

问题 99 如图16,$ABCD$ 是一矩形,且$\overline{BC}=3\,\overline{AB}$. 证明:如果 P、Q 是 BC 边上的点,且

$$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC},$$

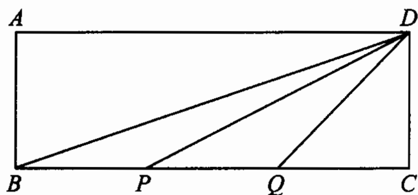


图 16

那么

$$\angle DBC+\angle DPC=\angle DQC.$$

问题 100 一个六边形内接于圆. 它的三条连续边的边长为 a,另三条连续边的边长为 b. 试确定该圆的半径.

问题 101 (1) 证明:数 10201 在任何进制下都是合数;

(2) 证明:数 10101 在任何进制下都是合数;

(3) 证明:数 100011 在任何进制下都是合数.

问题 102 假设有 n 个人,他们中每人都恰好掌握一件信息,且这所有的 n 件信息都不相同. 每次某个人 A 打电话给 B,A 告诉 B 所有他知道的,但是 B 则什么也不告诉 A. 问:让这些人都知道所有信息最少需要打多少个电话?

问题 103 证明:对每个整数 $n(n\geqslant 6)$,一个大正方形都可分割成 n 个不重叠的正方形.

问题 104 设 $ABCD$ 是非退化四边形,但不必是平面上的(顶点以循环次序命名),且有

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2.$$

证明:$ABCD$ 是一个平行四边形.

问题 105 证明:每个简单多面体至少有两个面具有相同的边数.

问题 106 $ABCDEF$ 是以 P 为中心的正六边形,PQR 是正三角形(见图 17). 如果 $\overline{AB}=3$,$\overline{SB}=1$,$\overline{PQ}=6$,求这两个图形公共部分的面积.

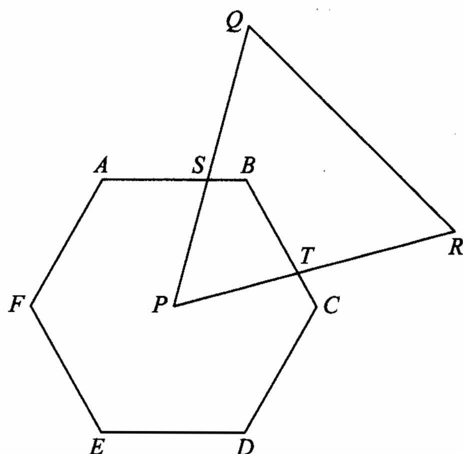


图 17

问题 107 证明:对每个正整数 n,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

问题 108 对每个正整数 n,设

$$h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

例如,

$$h(1)=1,\ h(2)=1+\frac{1}{2},\ h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

证明:

当 $n=2,3,4,\cdots$ 时,$n+h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(n-1)=nh(n)$.

问题 109 对哪些非负整数 n 和 k,

$$(k+1)^n+(k+2)^n+(k+3)^n+(k+4)^n+(k+5)^n$$

能被 5 整除?

问题 110 试给出用圆规直尺构造一个具有给定夹角 α、β 及周长 p 的三角形的方法.

问题 111 确定常数 k,使得多项式

$$P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$$

有因式 $x+y+z$. 证明:对于这一 k 值,$P(x,y,z)$ 有因式 $(x+y+z)^2$.

问题 112 证明:对所有正实数 p、q、r、s,

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)\cdot(s^2+s+1)\geqslant 81pqrs.$$

问题 113 证明:对任意正整数 n 及任意实数 x,

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x].$$

问题 114 观察以下两组等式：

A.

$$1=1$$

$$2\times1-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

$$3\times1-3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$4\times1-6\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

B.

$$1=1$$

$$\frac{1}{2}=2\times1-\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3}=3\times1-3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{4}=4\times1-6\left(1+\frac{1}{2}\right)+4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

确定每组等式的一般规律，并予以证明．归纳出这两组等式之间的关系．

问题 115 在平面上给定 $2n+3$ 个点（$n\geqslant1$），使任何三点不共线，且任何四点不共圆．证明：存在过其中某三个点的圆，使得余下的 $2n$ 个点中，n 个点在圆内，而另 n 个点在圆外．

问题 116 从一个不在给定平面上的点 P 出发，画三条两两垂直的线段，它们以该平面为终点．设 a、b、c 是这三条线段的长．证明：对于所有可允许的构造，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ 是一个常数．

问题 117 如果 a、b、c 是某三角形三边的长，证明：

$$3(bc+ca+ab)\leqslant(a+b+c)^2<4(bc+ca+ab).$$

问题 118 安迪正午驾车出发，以常速从 A 镇到 B 镇来回跑．鲍勃也在正午驾车出发，以 40 千米的时速从 B 镇到 A 镇，与安迪在同一条公路上来回跑．安迪在首次与鲍勃交会 20 分钟后到达 B 镇，而鲍勃在首次与安迪交会 45 分钟后到达 A 镇．问：安迪与鲍勃第 n 次交会在什么时间？

问题 119 两个不相等的正六边形 $ABCDEF$ 及 $CGHJKL$ 在 C 点处相交（如图 18），且 F、C、J 三点共线．证明：

(1) 圆 BCG 二等分线段 FJ（设分点为 O）；

(2) $\triangle BOG$ 是等边三角形．

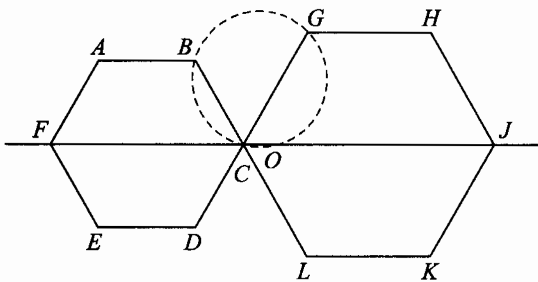


图 18

问题 120 设 n 是正整数．证明：当且仅当 n 是 2 的方幂时，二项式系数 $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \cdots, C_n^{n-1}$ 都是偶数．

问题 121 证明：对任何正整数 n，

$$1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$$

能被 1946 整除．

问题 122 如果 $P(x)$ 是一个 n 次多项式，且当 $k=1,2,\cdots,n+1$ 时，$P(k)=\frac{1}{k}$，求 $P(n+2)$．

问题 123 证明：$\ln x$ 不能表示成$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的形式，其中 $f(x)$和 $g(x)$都是关于 x 的多项式.

问题 124 一列火车恰好在整分钟时离开车站. 在行驶了 8 英里后，司机看了一下他的手表，发现时针正好与分针重合. 火车在这 8 英里中的平均速度是每小时 33 英里. 问：火车是什么时候离开车站的？

问题 125 已知：

(a) 四边形 $ABCD$ 的四边的长度；

(b) 线段 AB 和 CD 平行；

(c) 线段 BC 和 DA 不相交.

试描述构造四边形 $ABCD$ 的过程.

问题 126 在桌上有大量相同的等边三角形地砖. 你想将其中的 n 块拼成一个凸的等角的六边形(即内角均为 120°的六边形). 显然，n 不能是任意的正整数. 满足要求的 n 的最小值是 6，下一个值是 10，接着是 13(见图 19). 试确定满足要求的 n 值的条件.

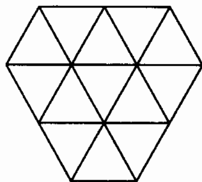


图 19

问题 127 设 a、b、c 是三个不同的整数，$P(x)$是一个整系数多项式. 证明：不可能有 $P(a)=b$，$P(b)=c$，$P(c)=a$. (USAMO 1974)

问题 128 假设多项式 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ 能分解为

$$(x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_n),$$

其中 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是实数. 证明：$(n-1)a_1{}^2\geqslant 2na_2$.

问题 129 对每个正整数 n，确定最小正数 $k(n)$，使得

$$k(n)+\sin\frac{A}{n}、k(n)+\sin\frac{B}{n}、k(n)+\sin\frac{C}{n}$$

是以 A、B、C 为内角的三角形的边长.

问题 130 证明：对 $n=1,2,3,\cdots$，有

(1) $(n+1)^n\geqslant 2^n n!$；

(2) $(n+1)^n(2n+1)^n\geqslant 6^n(n!)^2$.

问题 131 设 z_1、z_2、z_3 是复数，且满足

(a) $z_1z_2z_3=1$；

(b) $z_1+z_2+z_3=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}$.

证明：它们中至少有一个等于 1.

问题 132 设 m_a、m_b、m_c 和 w_a、w_b、w_c 分别是某三角形的中线的长和角平分线的长. 证明：

$$\sqrt{m_a}+\sqrt{m_b}+\sqrt{m_c}\geqslant\sqrt{w_a}+\sqrt{w_b}+\sqrt{w_c}.$$

问题 133 设 n 和 r 是整数，且 $0\leqslant r\leqslant n$. 将下列式子写成简单形式：

$$S=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^rC_n^r.$$

问题 134 设 x、y、z 是正数. 证明：

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}.$$

问题 135 如图 20，证明：抛物线 $y^2=4ax$ 的所有在其顶点处的直角所对的弦都共点.

问题 136 设 $ABCD$ 是凸四边形，且满足

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{DC}},$$

如图 21 所示. 证明：四边形 $PMQN$ 的面积等于$\triangle APD$ 与$\triangle BQC$ 的面积之和.

问题 137 给定空间中 5 个不共球的点，且它们中任意四点不共面. 问：如何构造一个

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

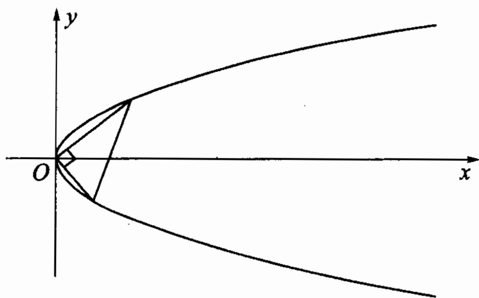


图 20

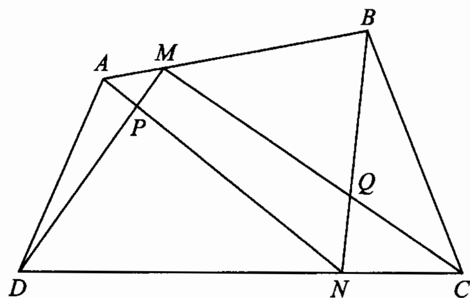


图 21

球，使它到这5个点的距离相等？解唯一吗？

问题 138 对任何非负整数 n，证明：$5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}$ 能被33整除.

问题 139 设 n 次多项式 $P(x)$ 满足 $P(k)=2^k$，$k=0,1,2,\cdots,n$，求 $P(n+1)$.

问题 140 假设对 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $0\leqslant x_i\leqslant 1$.
证明：

$$2^{n-1}(1+x_1x_2\cdots x_n)\geqslant (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n),$$

当且仅当这些 x_i 中有 $n-1$ 个都等于1时等号成立.

问题 141 舍温·贝劳兹是个狡猾的赌徒. 当你从一副52张的牌中选出3张牌，且其中没有12张人头牌(K、Q、J)中的至少一张，那么你将赢钱. 你愿意与他赌吗？

问题 142 给定 a、b、c、d，求所有 x、y、z、w，使得

(a) $y^2z^2w^2x=a^7$；
(b) $z^2w^2x^2y=b^7$；
(c) $w^2x^2y^2z=c^7$；
(d) $x^2y^2z^2w=d^7$.

问题 143 证明：如果一个有界立体形的所有平面截面都是圆，那么该立体形是个球.

问题 144 将 n 枚不同的硬币堆起来，且使得两枚特殊的硬币不相邻. 问：共有多少种堆法？

问题 145 两个固定的、不相等的、不相交的、也不相套的圆，分别被某个变化的圆切于 P 点和 Q 点. 证明：存在两个固定点，使得直线 PQ 必通过其中之一.

问题 146 如果 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 $x_i>0(i=1,\cdots,n)$，证明：

$$\frac{S}{S-x_1}+\frac{S}{S-x_2}+\cdots+\frac{S}{S-x_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1},$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

问题 147 对下式进行因式分解：

$$a^5(c-b)+b^5(a-c)+c^5(b-a).$$

问题 148 在一次数学竞赛中，对于每道题选手的得分可以为5,4,3,2,1或0. 如果共有7道题，则一位选手总分为30分的得分方式共有多少种？

问题 149 观察：

$$6^2-5^2=11,$$
$$56^2-45^2=1111,$$
$$556^2-445^2=111111,$$
$$5556^2-4445^2=11111111.$$

根据这些例子，确定其一般规律，并证明之.

问题 150 已知

$$yz=a(y+z)+r,$$
$$zx=a(z+x)+s,$$
$$xy=a(x+y)+t.$$

解出 x、y、z(用 a、r、s、t 表示).

问题 151 设△ABC 是等边三角形,P 是该三角形内的一点,过点 P 作该三角形三边的垂线 PD、PE、PF. 证明:无论如何选择 P,总有

$$\frac{\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

问题 152 解方程:

$$\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}.$$

问题 153 如果记 A 为使其(以 10 为底的)对数的首数是 a 的整数的个数,B 为使其倒数的对数的首数是 $-b$ 的整数的个数. 试确定$(\lg A-a)-(\lg B-b)$. ($\lg x$ 的首数是整数$[\lg x]$.)

问题 154 证明:方程组

$$\begin{cases}(x-h)^2+(y-k)^2=4(h^2+k^2),\\ xy=hk\end{cases}$$

的四个解中的三个解(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)对应的点正好是某个等边三角形的顶点. 给出它的几何解释.

问题 155 证明:对每个正整数 m,超过$(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数能被 2^{m+1}整除.

问题 156 假设非负有理数 r 是$\sqrt{2}$的一个近似值. 证明:$\frac{r+2}{r+1}$总是一个更好的有理逼近.

问题 157 求所有有理数 k,使得 $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$,且 $\cos k\pi$ 是有理数.

问题 158 解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=6ab,\\ x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3).\end{cases}$$

问题 159 证明:一个四面体的任意三个面的面积之和大于第四个面的面积.

问题 160 设 a、b、c 是直角三角形的三边长,其中斜边长是 c. 证明:$a+b\leqslant\sqrt{2}c$,并求何时等号成立.

问题 161 确定所有 θ,使得 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,且 $\sin^5\theta+\cos^5\theta=1$.

问题 162 如果一个等差数列的第 p 项及第 q 项分别是 q 和 p,求它的第 $p+q$ 项.

问题 163 设△ABC 的三边长是 a、b、c. 设∠C 的平分线交 AB 于 D. 证明:CD 的长度等于

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

问题 164 对于哪些正整数基底 b,1367631(表示为 b 进制形式)是一个完全立方数?

问题 165 如果 x 是不等于 1 的正实数,n 是正整数,证明:

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\geqslant(2n+1)x^n.$$

问题 166 如果一个等差数列的第 p 项、第 q 项及第 r 项分别是 q、r 和 p,求它的第$(p+q)$项与第$(q+r)$项的差.

问题 167 给定平面上的一个圆 Γ,以及在普通位置上的两个点 A 和 B. 试构造一个圆,

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

使它过 A 和 B，且交 Γ 于其某条直径的两个端点.

问题 168 求一多项式方程，使得它的根是多项式方程 $t^3+at^2+bt+c=0$（这里 a、b、c 是常数）的根的立方.

问题 169 如果 a、b、c、d 是正实数，证明：

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b}\geqslant a+b+c+d,$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立.

问题 170 (1) 一个正整数的首位是 6，而把数字 6 删去后的整数是原数的 $\frac{1}{25}$，求所有这样的正整数；

(2) 证明：不存在这样的整数，使得其第一位数字删去后得到的数是原数的 $\frac{1}{35}$.

问题 171 证明：如果一个凸多边形有三个内角都等于 60°，那么它必定是一个等边三角形.

问题 172 证明：对于实数 x、y、z，有

$$x^4(1+y^4)+y^4(1+z^4)+z^4(1+x^4)\geqslant 6x^2y^2z^2,$$

并求等号何时成立.

问题 173 在 1 到 10^{30} 之间（包括端点），有多少个整数既不是完全平方数，又不是完全立方数，也不是完全五次方数？

问题 174 集合 $\{16^n+10n-1 \mid n=1,2,3,\cdots\}$ 的最大公因数是什么？

问题 175 如果 $a_i\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots$，证明：对每个正整数 n，有

$$n+a_1a_2\cdots a_n\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

当且仅当这些 a_i 中至多只有一个不等于 1 时等号成立.

问题 176 分别用 $x-a$、$x-b$、$x-c$ 去除某个给定的多项式 $p(x)$，所得余数为 a、b、c. 若用 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 去除 $p(x)$，余式是什么（a、b、c 互不相同）？

问题 177 对所有实数 x，确定满足下列函数方程的函数 $F(x)$：

$$x^2F(x)+F(1-x)=2x-x^4.$$

问题 178 证明：不存在正整数 a、b、c，使得

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2.$$

问题 179 实数数列 $\{a_n\}$ 定义如下：

$$a_1=1,\ a_{n+1}=1+a_1a_2\cdots a_n\quad(n\geqslant 1).$$

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=2.$$

问题 180 如何仅使用长度小于 $\overline{AB}$ 的直尺作为工具，来构造出联结 A 和 B 两点的直线段？

问题 181 证明：如果不在同一平面上的两个圆，它们或交于两点，或相切，那么它们必定是共球的.（即存在一个球面，使它同时包含这两个圆.）

问题 182 设 x、y、z 是三个不同素数的立方根. 证明：x、y、z 不可能是某个等差数列中的（不必连续的）三项.

问题 183 如图 22，OBC 是空间中的一个三角形，A 是不在该三角形所在平面上的一点，且 AO 垂直于平面 BOC，D 是从 A 到 BC 所引的垂线的垂足. 证明：$OD\perp BC$.

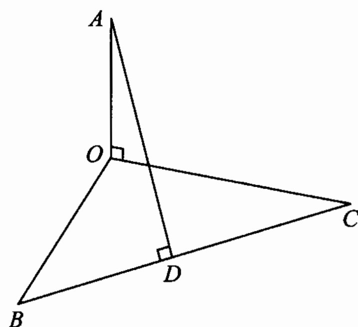


图 22

问题 184 设 A、B、C、D 是空间中四点，求四个顶点分别在线段 AB、BC、CD、DA 之上的所有平行四边形的中心的轨迹.

问题 185 分别从两个互离的圆的中心向另一圆画切线，如图 23 所示. 证明：$\overline{AB}=\overline{CD}$.

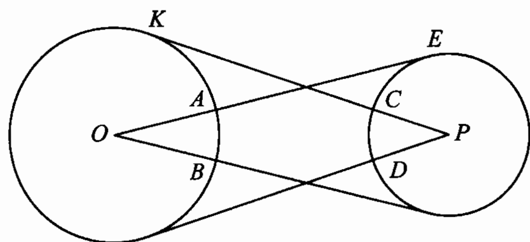


图 23

问题 186 设 P、Q、R、S 分别是斜四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，且使得 P、Q、R、S 共面. 再设 P'、Q'、R'、S' 分别是另一斜四边形 $A'B'C'D$ 的边 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 上的点. 假设

$$\overline{AB}=\overline{A'B'},\ \overline{BC}=\overline{B'C'},\ \overline{CD}=\overline{C'D'},$$
$$\overline{DA}=\overline{D'A'},\ \overline{AP}=\overline{A'P'},\ \overline{BQ}=\overline{B'Q'},$$
$$\overline{CR}=\overline{C'R'},\ \overline{DS}=\overline{D'S'}.$$

证明：P'、Q'、R'、S' 也共面.

问题 187 求正数 k，使得对某个 $\triangle ABC$（相对于角 A、B、C 的边长分别为 a、b、c），满足：

(a) $a+b=kc$;

(b) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}=k\cot\dfrac{C}{2}$.

问题 188 设 A、B、C、D 是空间四点，使得 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$. 证明：$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共面.

问题 189 如果在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=18°$，$\angle C=36°$，证明：$a-b$ 等于该三角形的外接圆半径.

问题 190 设 $ABCD$ 是圆内接凸四边形，且有 $AB\perp CD$. 分别记 a、b、c、d 为 AB、BC、CD、DA 的边长. 证明：

$$(ab+cd)^2+(ad+bc)^2=(b^2-d^2)^2.$$

问题 191 假设 P、Q、R、S 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD、DA 上的点，使得直线 PS 与 QR 相交. 证明：直线 PQ、RS 及 AC 共点或平行.

问题 192 设$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 是等边三角形，它们所在的平面的夹角是 θ. 求$\angle CAD$（用 θ 表示）.

问题 193 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=5$，$\overline{AB}=6$. 确定$\dfrac{\angle BCA}{\angle CAB}$的比值.

问题 194 给定一个立体的球、一副圆规、一把直尺及一张平面纸，试作出该球的半径.

问题 195 设 n 是不小于 3 的正整数. 试用直观的组合来解释下列等式：

$$C_{C_n^2}^2=3C_{n+1}^4.$$

问题 196 证明：一个凸多面体 P 既不能满足(a)，又不能满足(b)：

(a) P 恰有 7 条棱；

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

(b) P 的所有面都是六边形.

问题 197 求图 24 所示的等边三角形的边长 x.

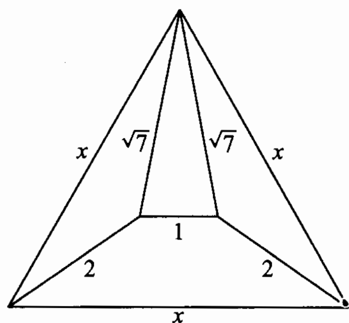


图 24

问题 198 设 A、B、C、D 是空间中四点,使得 AC 垂直于 BD. 假设 A'、B'、C'、D'是另四个点,使得

$$\overline{AB}=\overline{A'B'},\ \overline{BC}=\overline{B'C'},$$
$$\overline{CD}=\overline{C'D'},\ \overline{DA}=\overline{D'A'}.$$

证明:$A'C'$垂直于 $B'D'$.

问题 199 设 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$是三个多项式,使得 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$能被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除. 证明:$P(x)$能被 $x-1$ 整除. (USAMO 1976)

问题 200 如图 25 所示,若 $ABCD-EFGH$ 是一个立方体,且$\triangle PQR$ 的顶点 P、Q、R 分别落在棱 AB、CG、EH 上,试确定$\triangle PQR$ 的最小周长.

问题 201 某人每天早上驾车行驶 6 千米去上班. 他每天在同一时刻出门,并且为了准时到达,他必须以平均 36 千米的时速开车. 但是有一天,在最初的 2 千米他一直跟在环卫车后面,这就使得他在这段路程中的平均时速降到了 12 千米. 已知他的汽车时速能开到 150 千米,问:他还能准时上班吗?

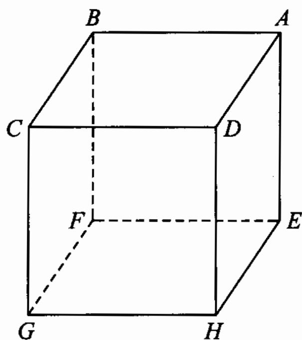


图 25

问题 202 一个台历由正十二面体构成,在它的 12 个五边形的面上各有一个不同的月份. 共有多少种本质上不同的在各面上对月份的排法?

问题 203 (1) 证明:1 是唯一等于其每位数字的平方和(10 进制)的正整数;

(2) 求所有除 1 以外的等于其每位数字的立方和(10 进制)的正整数.

问题 204 求所有本质上不同的在平面上放置四个点的方法,使得由此确定的六条线段恰有两种不同的长度.

问题 205 三人玩游戏,输者将另两人的钱加倍. 在玩了三次游戏后,每人都恰好输了一次,且每人都有 \$24.00. 问:每个人在游戏之初有多少钱?

> 一位从三一学院毕业的年轻小伙,
> 认为接受 $\sqrt{\infty}$ 并无不妥.
> 但是要问其中数字几何,
> 他就坐立不安脑袋如空壳;
> 于是他放弃数学去把神学求索.

问题 206 (1) 在$\triangle ABC$中,$\overline{AB}=2\overline{BC}$,证明:$BC$必为最短边;如果该三角形的周长是24,证明:$4<\overline{BC}<6$;

(2) 如果三角形的一边长是另一边长的三倍,且周长等于24,求最短边长的界.

问题 207 证明:如果k是非负整数,则有:

(1) $1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}\geqslant 2\cdot 7^k$;

(2) $1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}\geqslant 6^{k+1}$.

等号何时成立?

问题 208 解方程:

$(x+1)(x+2)(x+3)=(x-3)(x+4)(x+5)$.

问题 209 求最小正整数,使得它除以2,3,4,…,10之后的余数分别是1,2,3,…,9.

问题 210 两辆汽车同时从A点和B点出发,在同一条公路上相向行驶.它们的速度都是常数,且比值为5∶4,从A点出发的汽车开得快一些.两车都在A、B两点之间来回行驶.它们第二次相遇是在第145(英里)里程标处,而第三次相遇是在第201里程标处.问:A点和B点分别是第几里程标?

问题 211 数7^{9999}的最后三位数字是什么?

问题 212 在$\triangle ABC$中,$\overline{AB}=\overline{AC}$,$\angle BAC=20°$. X是AB上的点,使得$\angle XCB=50°$;Y是AC上的点,使得$\angle YBC=60°$.确定$\angle AXY$的大小.

问题 213 证明:对于由落在两条斜直线上的两线段的端点所确定的四面体,如果将这两线段沿所在直线滑动(但保持两线段长度不变),其体积保持不变.

问题 214 (1) 一批人排成一列在一条平直的公路上行军,队伍总长达1千米.一位检阅官从队伍尾部出发,以常速向前走,直到到达队伍的前端,然后又调转头向后以同样速度走,直到到达队伍尾部的最后一人.此时,这列以常速前进的队伍已经向前走了1千米,因此队伍末尾的人已经走到了出发时队伍最前面的人所处的位置.问:检阅官走了多少路?

(2) 如果将(1)中的队列改为1千米见方的方阵,而检阅官绕着方阵走,再回答(1)中的问题.

问题 215 设$ABCD$是个四面体,它的各个面都有相同的面积.假设O是$ABCD$内的点,L、M、N、P分别是O到四个面的垂线的垂足.证明:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\geqslant 3(\overline{OL}+\overline{OM}+\overline{ON}+\overline{OP}).$$

问题 216 一艘船出现了渗漏.水正以均匀的速度向船内涌入,且发现漏水时船体内已经有了积水.此时,如果有12个技术相当的人,可在3小时内将积水排干;如果只有5个人,则需要10小时.如果要在2小时内排干积水,共需要几人?

问题 217 国际象棋棋盘上的马走一步,是它沿平行于棋盘一边的方向走两格,再朝垂直方向走一格.一次"马的旅行"是指马连续地走若干步,使得它走遍棋盘上的每一格恰好一次.如果马走到的最后一格恰好是从它的起始位置走一步能到的地方,则称该旅行是"封闭"的.证明:如果m、n都是奇数,那么在一个$m\times n$的棋盘上不可能存在马的封闭旅行路线.

问题 218 根据当地天文台的报时信号,我的手表的时针和分针每65分钟恰好重合一次.我的手表快了还是慢了?快慢多少?我的手表快或慢一小时要花多少时间?

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

问题 219 画出下列不等式的草图：

$$|x^2+y|\leqslant|y^2+x|.$$

问题 220 证明：不等式

$$3a^4-4a^3b+b^4\geqslant 0$$

对所有实数 a 和 b 都成立.

问题 221 求边长为整数，且一个角的大小是另一个角两倍的所有三角形.

问题 222 (1) 证明：如果 n 是一个三角形数，那么 $9n+1$ 也是三角形数；(三角形数是：$1,3,6,10,\cdots,\frac{k(k+1)}{2},\cdots$，参见工具箱 B9.)

(2) 求其他的数 a、b，使得只要 n 是三角形数，那么 $an+b$ 也是三角形数.

问题 223 证明：对任何正整数 n，

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}],$$

其中[ ]标记表示取最大整数的函数.

问题 224 证明或否证以下命题：给定直线 l 及不在 l 上的两点 A 和 B，点 P 在 l 上，使得 $\angle APB$ 最大，则 P 必落在从 A 和 B 到 l 的垂线的两垂足之间.

问题 225 确定所有 $\triangle ABC$，使得

$$\cos A\cos B+\sin A\sin B\sin C=1.$$

问题 226 设

$$a_1=2^2+3^2+6^2,a_2=3^2+4^2+12^2,$$
$$a_3=4^2+5^2+20^2,\cdots.$$

给出上述等式的一般形式，且使得 a_n 总是完全平方数.

问题 227 假设 x、y、z 是非负实数，证明：

$$8(x^3+y^3+z^3)^2\geqslant 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

问题 228 在目前这一刻还在世的每个人肯定握过一定次数的手. 证明：握过奇数次手的人数是偶数. (不考虑与自己握手的次数.)

问题 229 任给 a、b、c，解以下关于未知量 x、y、z 的方程组：

$$\begin{cases}x^2-yz=a^2, & (1)\\ y^2-zx=b^2, & (2)\\ z^2-xy=c^2. & (3)\end{cases}$$

问题 230 证明：对每个正整数 n，

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^n(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+3+\cdots+n).$$

问题 231 如果 a、b、c 是某三角形的三边的长度，证明：

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

问题 232 证明：一个中心对称区域的最长弦必定通过中心.

问题 233 一圆盘被分割成 k 个扇形，每个扇形中放置一枚硬币. 每一次移动都将其中两枚硬币(不必在同一扇形中)的位置进行变动，一枚向顺时针方向，另一枚向逆时针方向移动到邻近的扇形中. 经过一系列移动后，是否有可能所有的硬币都放到了同一个扇形里？

问题 234 假设

$$\sin x+\sin y=a,\cos x+\cos y=b.$$

确定 $\tan\frac{x}{2}$ 和 $\tan\frac{y}{2}$.

问题 235 在一个圆的圆周上有两个固定点 A 和 B，以及一个动点 M. 在 AM 的延长线上取一点 N，它在该圆的外部，并且使得 $\overline{MN}=\overline{MB}$. 求 N 的轨迹.

问题 236 求满足下列方程的所有实数解：

$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3.$$

问题 237 恰好够一辆赛车在圆形赛道上跑一圈的汽油有一次被分成若干部分，并被随机地放置在赛道的某些点上．证明：在赛道上存在一点，使得具有空油箱的赛车被放置在该点上后，车子能从一个方向或另一个方向兜完这一圈．

问题 238 证明：对所有实数 x（弧度），有 $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$．

问题 239 证明：当 m 是正整数时，方程

$$x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1=0$$

恰有 m 个正整数解 (x,y)．

问题 240 设 $PQRS$ 是内接于凸四边形 $ABCD$ 的任意凸四边形，如图 26 所示．

$P'Q'R'S'$ 是另一四边形，也内接于 $ABCD$，且使得 P'、Q'、R'、S'分别是 P、Q、R、S 关于 AB、BC、CD、DA 的中点的“镜像”．确定所有凸四边形 $ABCD$ 的种类，使得 $PQRS$ 的面积与 $P'Q'R'S'$的面积相等．

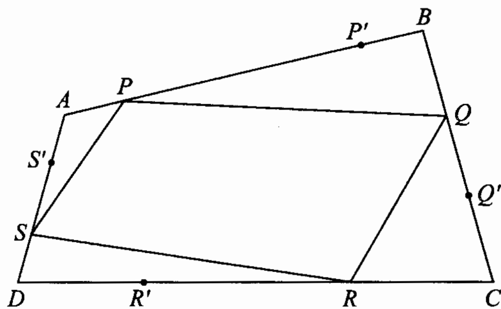


图 26

问题 241 给定互不相等的数 a、b、c、d，求下列方程组中的未知量 x、y、z、w：

$$x+ay+a^2z+a^3w=a^4,$$
$$x+by+b^2z+b^3w=b^4,$$
$$x+cy+c^2z+c^3w=c^4,$$
$$x+dy+d^2z+d^3w=d^4.$$

问题 242 设 a、b、c 是直角三角形的整数边长，其中 $a<b<c$．证明：$ab(b^2-a^2)$能被 84 整除．

问题 243 如果 A、B、C 是某三角形的三个内角，确定

$$\sin^2 A+\sin B\sin C\cos A$$

的最大值．

问题 244 如果在一给定圆的圆周上（就弧长而言）随机选取三点．求由这三点所确定的三角形是锐角三角形的概率．

问题 245 用三种颜色来对笛卡儿平面上具有整数坐标的点 (x,y) 进行涂色，使得：

(a) 对于无限多条平行于 x 轴的直线，每种颜色都出现无限多次；

(b) 不同色的三点都不共线．

问：这样的涂色方案存在吗？

问题 246 一个人向北以每小时 4 千米的速度散步，他注意到此时风是从西面吹来的．他将速度提高了一倍，现在风改从西北面吹来．问：风速是多少？

问题 247 桌子上放了四个球．每个球均与其他三个球相切．如果其中三个球的半径均为 R，问：第四个球的半径是多少？

问题 248 方程 $a^2+b^2+c^2+d^2=abcd$ 有解 $(a,b,c,d)=(2,2,2,2)$．求该方程的无限多个其他正整数解．

问题 249 设三角形的一边比另一边长 10 英尺，且它们之间的夹角为 60°．以这两边为直径画两个圆．这两个圆的交点之一是该两条边的公共顶点．问：从该三角形的第三边

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

到(两圆的)另一个交点有多远?

问题 250 给定一个等腰三角形的两条腰长,问:当该三角形的面积达到最大时,第三边的长度是多少?

问题 251 设 $ABCD$ 为正方形,F 是 DC 的中点,E 为 AB 上使$\overline{AE}>\overline{EB}$的任意一点,$H$ 为 BC 上一点,使 $DE /\!/ FH$. 证明:EH 与这个正方形的内切圆相切.

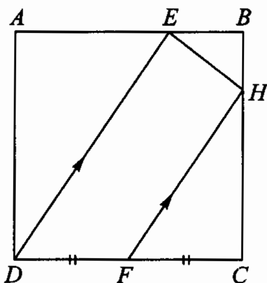


图 27

问题 252 设 a、b 是两个给定的正实数,并且满足 $a^a=b, b^b=a$,证明:$a=b$.

问题 253 末尾四位数字是 9009 的最小完全平方数是几?

问题 254 如图 28,$\triangle ABC$ 与$\triangle FDC$ 是两个直角三角形,斜边 AB 与 FD 交于点 E. 试用 $\alpha=\angle BAC$, $\beta=\angle DFC$,以及两条斜边的长表示点 E 到 FC 的距离 x.

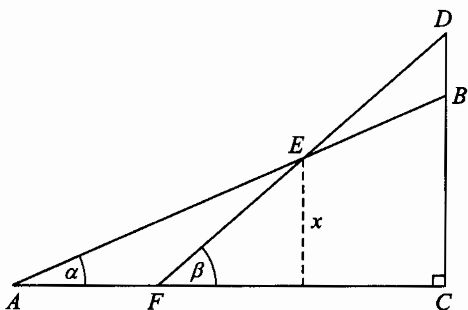


图 28

问题 255 观察下面两式:

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

和

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right).$$

给出上述例子的一般规律,并加以证明.

问题 256 设 n 是一个正整数. 证明:$(x-1)^2$ 是 $x^n-n(x-1)-1$ 的一个因式.

问题 257 在下表中,注意到排成矩形的 36 个数,每一个都等于它所在列最上面的一个数与它所在行最左边的一个数的和.

	1	9	3	2	4	8
2	**3**	11	5	4	6	10
7	8	16	**10**	9	11	15
3	4	**12**	6	5	7	11
5	6	14	8	7	**9**	13
8	9	17	11	10	12	**16**
7	8	16	10	**9**	11	15

例如,$17=9+8$ 及 $13=8+5$.

表中的 6 个黑体数每一个都选自不同的行和不同的列. 表中带下划线的 6 个数也用类似方法选出. 注意到这 6 个黑体数的和 $3+10+12+9+16+9=59$,带下划线的 6 个数的和 $5+16+5+13+9+11=59$. 证明:如果在表内部的 36 个数中任意选出 6 个数,只要这 6 个数的每一个都取自不同的行和不同的列,则这 6 个数的和等于 59.

问题 258 将一系列的等圆平铺在平面上,使得每一个圆都与另外 6 个圆相切. 那么平

面上有百分之几的面积被这些圆覆盖了?

问题 259 证明:如果 a、b、c 都是整数,且 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=0$,则 $a=b=c=0$.

问题 260 证明:对任意三个不同的有理数 a、b、c,

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$

是某个有理数的平方.

问题 261 如图 29,设 $\triangle ABC$ 是一个等边三角形,E 是 AC 的延长线上一点,D 是平面上一点,使 $\triangle CDE$ 为等边三角形. 证明:如果 M、N 分别是 AD 和 BE 的中点,则 $\triangle CMN$ 是一个等边三角形.

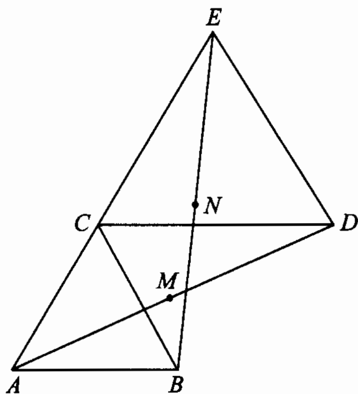


图 29

问题 262 设

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6,$$

且

$p=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$,

$q=a_1a_3+a_3a_5+a_5a_1+a_2a_4+a_4a_6+a_6a_2$,

$r=a_1a_3a_5+a_2a_4a_6$.

试问:三次方程 $2x^3-px^2+qx-r$ 的根是否都是实数?

问题 263 证明:对 $n=1,2,3,\cdots$,所有 $4n^3+6n^2+4n+1$ 都是合数.

问题 264 下列乘法"幻方"中,每行、每列及两条对角线上的三个元素的乘积都相等,即 $abc,def,ghi,adg,beh,cfi,aei,ceg$ 都相等,不妨设为 k. 证明:如果幻方中的所有元素都是整数,则 k 一定是个完全立方数.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

问题 265 四个犯罪嫌疑人对警察做了如下供词:

安迪:是卡尔干的.

鲍勃:我没干.

卡尔:是戴维干的.

戴维:卡尔说是我干的,那是他在撒谎.

(1) 如果上述四人只有一个人说了真话,那么谁是罪犯呢?

(2) 如果上述四人只有一个人说了假话,那么谁是罪犯呢?

问题 266 能否以某种方式投掷两粒骰子(骰子的投掷方式不必相同),使得所有结果 2,3,…,12 出现的可能性都相同?

问题 267 (1) 直角坐标平面上,满足条件

$$|x|+|y|+|x+y|\leqslant 2$$

的点 (x,y) 所构成的区域的面积是多少?

(2) 空间中,满足条件

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z|\leqslant 2$$

的点 (x,y,z) 所构成的区域的体积是多少?

问题 268 有多少种本质上不同的方式来安排 3 对夫妇在圆形餐桌边就座,使得每个丈夫都不与他的妻子相邻?("本质上不同"的意思是指,任何一种就坐方式都不是另一种就坐方式的旋转. 问题中也没有假定男人和女人都必须相间而坐.)

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

问题 269 AB 和 AC 是两条公路，两者之间是崎岖不平的地面(见图 30). AB 和 AC 间的距离都等于 p，而 BC 间的距离等于 q. 某人打算由 B 点步行至 C 点. 他在公路上的速度是 v，而在崎岖不平的地面上的速度是 w. 证明：如果他想要以最短的时间到达 C 点，他就应该选择下列两条特定路线中的一条，并请说明理由：

(a) 如果 $2pw\leqslant qv$，则应顺公路经 A 到达；

(b) 如果 $2pw\geqslant qv$，则应沿 BC 直达.

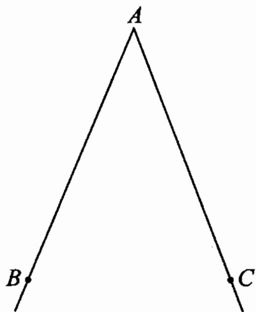


图 30

问题 270 证明：不存在多项式 $p(x)$，使对每一个正整数 n，有

$$p(n)=\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n.$$

问题 271 对正整数 n，定义

$$f(n)=1^n+2^{n-1}+3^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+(n-2)^3+(n-1)^2+n.$$

则 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ 的最小值是几?

问题 272 设 a、b、c、d 为不小于 2 的自然数. 请使用括号将

$$a^{b^{c^d}}$$

写成具有不同含义的式子.

例如，我们有 $a^{(b^c)^d}=a^{b^{cd}}$ 或 $(a^b)^{c^d}=a^{bc^d}$. 一般来说，要求写出的式子应该互不相同.

对怎样的两个式子，总可以用不等号将它们连起来? 对不满足一般不等式的两个式子，给出数字实例，以说明每一个特殊的不等情形.

问题 273 每千人中有 35 人患有高血压. 高血压人群中有 80%的人饮酒，而不患高血压的人群中有 60%的人饮酒. 饮酒的人群中，患高血压的百分比是多少?

问题 274 $(1,2,3,\cdots,n)$ 共有 $n!$ 种排列 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$. 对 $k=1,2,\cdots,n$，各有多少种排列满足 $s_k\geqslant k-2$?

问题 275 证明：对任一边长为 a、b、c、d 的四边形，有

$$a^2+b^2+c^2>\frac{1}{3}d^2.$$

问题 276 设 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 是集合 $\{1,2,\cdots,15,16\}$ 中任意给定的 8 个不同的正整数，证明：存在数 k，使

$$a_i-a_j=k$$

至少有 3 个不同的解 (a_i,a_j).

问题 277 是否存在整数 k，使映射

$$(x,y)\to x^2+kxy+y^2\quad (x,y\text{ 为整数})$$

的象集包含：(i)所有的整数；(ii)所有的正整数? 如果存在，请找出一个来；如果不存在，请给出证明.

问题 278 设 a、b、c 是不全为零的整数. 证明：如果 ax^2+bx+c 有有理根，则 a、b、c 中至少有一个是偶数.

问题 279 巴尔博说："我比克拉姆金重，而克拉姆金比莫泽重."克拉姆金说："莫泽比我重，而且莫泽也比巴尔博重."莫泽说："克拉姆金比我重，而巴尔博同我一样重."假如一个体重较轻的人比体重较重的人更能作出正

确的判断，请按体重递增的次序排列巴尔博、克拉姆金和莫泽.

问题 280 设 $f(x,y)$ 是一个不恒等于零的二元实函数. 如果对所有的 x、y 有 $f(x,y)=kf(y,x)$，则 k 的值是什么？

问题 281 对给定的凸四边形，试确定一点，使这点到四个顶点的距离之和最小.

问题 282 在冬至日这一天(通常是 12 月 22 日)，地球的轴从垂直于它的轨道平面的位置向北极偏离太阳的方向倾斜了约 $23°27'$. 计算冬至日这一天，在北纬 $43°45'$ 处从日出到日落所经过的时间(取近似值). (在你的家乡，这一天的白天有多长呢?)

问题 283 一个梯形被它的两条对角线分为四个部分. 设 A 和 B 表示与它的两条平行边相邻的两个三角形的面积(见图 31). 试用 A 和 B 来表示这个梯形的面积.

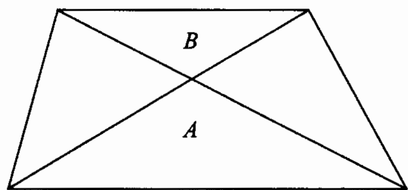


图 31

问题 284 设 n 为任一正整数. 求在下列整数中出现的所有数字的和：

$$1,2,3,\cdots,10^n-2,10^n-1.$$

问题 285 在图 32 的直角三角形中，求出用 a 和 b 来表示的阴影部分面积的表达式.

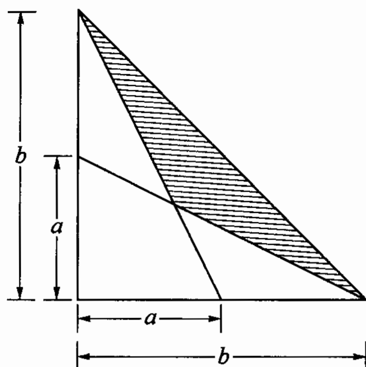


图 32

问题 286 已知正五边形中的一点，试在这个正五边形中找出另外 9 个点，使其中每一个点到这个正五边形各边(必要时为边的延长线)的距离的和与给定点到各边的距离的和相同.

问题 287 分解因式：$(x+y)^7-(x^7+y^7)$.

问题 288 设 $ABCDE$ 是一个正五边形. BE 与 AC、AD 分别交于点 H 和点 K. 过点 H 且平行于 AD 的直线交 AB 于点 F. 过点 K 且平行于 AC 的直线交 AE 于点 G. 证明：$AFHKG$ 是一个正五边形.

问题 289 下列和式虽然看起来可能成立，但请证明：无论怎样用不同的数字去代替算式中的不同字母，和式都不能成立.

$$\begin{array}{r} T\ H\ R\ E\ E \\ +\quad F\ I\ V\ E \\ \hline E\ I\ G\ H\ T \end{array}$$

问题 290 设 a、b、c 是任意三个正整数，并设

x 为 b 和 c 的最大公因数，

y 为 a 和 c 的最大公因数，

z 为 a 和 b 的最大公因数.

证明：a、b、c 与 x、y、z 有相同的最大公因数.

问题 291 一个菌群中的细菌数量每 12 小时增加一倍. 一个可容纳 1 000 000 个细菌

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

的培养皿在 13 天后就充满了细菌. 一个可容纳 2 000 000 个细菌的培养皿要多少天就能被充满?

问题 292 设 $f(x)$是一个非减实函数,使经过曲线 $y=f(x)$上任何两点的直线的斜率都非负. 设 c 是任意实数,求解方程

$$x=c-f(x+f(c)).$$

问题 293 设E 为$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点,F 是 AC 上一点,使 $\overline{AC}=3\ \overline{FC}$. 求$\triangle FEC$ 与四边形 $ABEF$ 的面积之比.

问题 294 不使用数表计算 $(\log_3 169)\times(\log_{13} 243)$的值.

问题 295 直角$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、$c(c^2=a^2+b^2)$,以这个直角三角形的三边 AB、BC、CA 为边分别向外作正方形(如图 33),以这三个正方形的"外"顶点作六边形. 试用 a、b、c 表示这个六边形的面积.

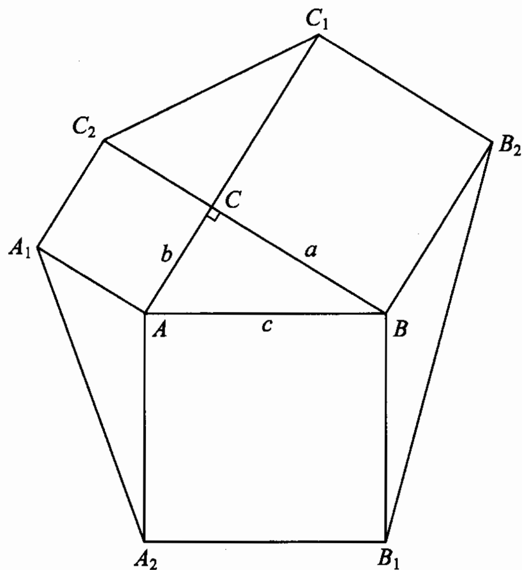


图 33

问题 296 证明:对任意的正整数 n,以 $6\cdot 10^{n+2}$、$1125\cdot 10^{2n+1}-8$、$1125\cdot 10^{2n+1}+8$ 为边长的三角形是一个直角三角形.

问题 297 网球俱乐部邀请了 32 位同等实力的网球选手参加淘汰赛(选手们捉对厮杀,任何一场比赛的输者将不能参加下一轮的比赛). 那么两个特定选手在比赛中相遇的概率是多少?

问题 298 有人建议,可按下列方法用圆规和直尺将任意一个锐角 POQ 三等分(见图 34).

"由 OQ 上任意一点 B 作 OP 的垂线,垂足为 A. 作等边$\triangle ABC$,使 C 与 O 在 AB 的两边. 则$\angle POC=\frac{1}{3}\angle POQ$."

求出使上述方法有效的锐角 POQ,并证明此方法对其余所有锐角都无效.

(本题基于约翰(John)和罗森塔尔(Stuart Rosenthal)两人的想法,当时他们还是多伦多 Forest Hill 高级中学的学生.)

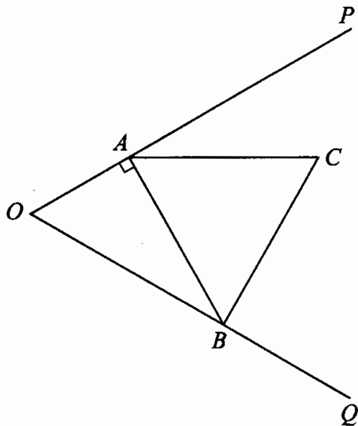


图 34

问题 299 已知 111…11 是用二进制表示的一个数,求这个数的平方,并也用二进制来表示.

问题 300 证明:当 $k=1,2,3,\cdots$时,

$$\sin\frac{\pi}{2k}\sin\frac{3\pi}{2k}\sin\frac{5\pi}{2k}\cdots\sin\frac{\left(2\left[\frac{k+1}{2}\right]-1\right)\pi}{2k}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}.$$

问题 301 (1) 证明：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640};$$

(2) 证明：如果将 1 表述为如(1)中所示的一些取自等差数列{2,5,8,11,14,17,20,…}的不同项的倒数的和，则该表述至少有 8 项.

问题 302 如图 35，正方形的三个角上割去了三个等腰直角三角形. 在剩下的五边形中画两条直线，将这个五边形分为三部分，使这三部分能拼成一个正方形.

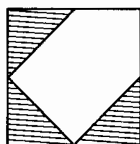


图 35

问题 303 一个民意调查员对一定数量的人(比如 N 个)进行了调查，以了解他们是否使用收音机、电视和/或报纸作为新闻的来源. 他汇报的调查结果如下：

50 人使用电视作为新闻的来源，其中包括只看电视的和结合其他新闻来源的人；

61 人不使用收音机作为新闻的来源；

13 人不使用报纸作为新闻的来源；

74 人至少使用两种方式来获取新闻.

求出与上述信息相吻合的 N 的最大值和最小值.

对 N 取得最大值和最小值时的情形，分别给出具体的例子.

问题 304 设 V 与 F 分别是抛物线的顶点和焦点. P 是抛物线上不同于 V 的点，Q 是抛物线内的一点，满足：

(a) PQ 与抛物线正交；

(b) $\overline{PQ}=\overline{VF}$.

证明：线段 PQ 与抛物线的对称轴不相交.

问题 305 设 x、y 和 z 都是实数，且满足

$$x+y+z=5 \quad 和 \quad xy+yz+zx=3.$$

求三个数中的任何一个数所能取得的最大值.

问题 306 证明：对所有的正整数 n，

$$7^{2n}-2352n-1$$

能被 2304 整除.

问题 307 四面体 $ABCD$ 中，

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5,$$

且 $\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DB}=5$，求该四面体的体积.

问题 308 将

$$2(x^4+y^4+z^4+w^4)-$$
$$(x^2+y^2+z^2+w^2)^2+8xyzw$$

表示为非常数实多项式的乘积.

问题 309 如图 36，设 Q 是圆 O 外一点，以 Q 为圆心、OQ 为半径作圆. 由 Q 发出的射线交两圆于 R 和 S. 证明：RS 的中点 P 的轨迹不是一条线段.

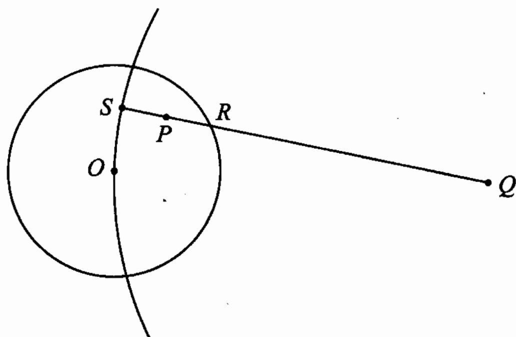


图 36

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 310 观察下列式子：

$$1=1^2,$$
$$2+3+4=3^2,$$
$$3+4+5+6+7=5^2,$$
$$4+5+6+7+8+9+10=7^2.$$

确定这些例子所反映的一般规律，并证明之.

问题 311 设多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

的系数满足条件 $0\leqslant a_i\leqslant a_0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 令

$$f^2(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}.$$

证明：

$$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}f^2(1).$$

问题 312 证明：

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots=\frac{1}{2};$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

问题 313 已知某集合由 $n+1$ 个不超过 $2n$ 的正整数组成. 证明：其中至少有一个数能整除另一个.

问题 314 如图 37，已知 AB 是圆的直径，X 是圆上除 A 与 B 外的一点，t_A、t_B 及 t_X 分别是圆在 A、B 和 X 处的切线. 设 AX 的延长线交 t_B 于 Z，BX 的延长线交 t_A 于 Y. 证明：YZ、t_X 和 AB 三条直线或者交于一点，或者互相平行.

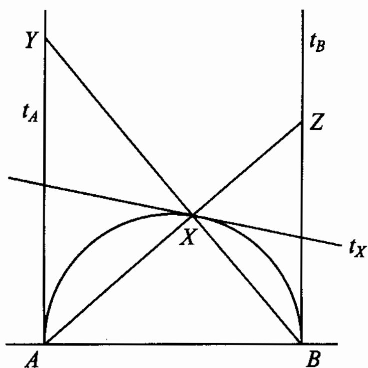


图 37

问题 315 证明：一个由 6 个连续整数所组成的集合不可能分为两个集合，使一个集合中的数的最小公倍数等于另一个集合中的数的最小公倍数.

问题 316 对任一正整数 n，令 $f(n)$ 表示第 n 个非平方数的正整数，即：

$$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=6,$$
$$f(5)=7,\ f(6)=8,\ f(7)=10,\ \cdots.$$

证明：

$$f(n)=n+\{\sqrt{n}\},$$

其中 $\{x\}$ 表示最接近于 x 的整数. (例如 $\{\sqrt{1}\}=1$, $\{\sqrt{2}\}=1$, $\{\sqrt{3}\}=2$, $\{\sqrt{4}\}=2$.)

问题 317 我邀请你参加下面的扑克游戏：先将一副普通的牌洗开，然后每两张一组翻开，使牌面朝上. 如果两张牌都是黑的，你收起这两张牌. 如果两张牌都是红的，我收起这两张牌. 如果一张是红的，一张是黑的，那就谁也不拿.

你要先付 1 美元以便能参加游戏. 当牌用完以后，游戏便结束. 如果你的牌不比我多，你不用再付任何钱. 另一方面，如果你的牌比我多，每多一张牌，我都将付给你 3 美元. 你愿意和我玩这个游戏吗?

问题 318 设$\triangle ABO$ 与$\triangle A'B'O$ 是两个具有公共直角顶点的等腰直角三角形(见图

38). 证明:$\overline{AA'}=\overline{BB'}$,且 $AA'\perp BB'$.

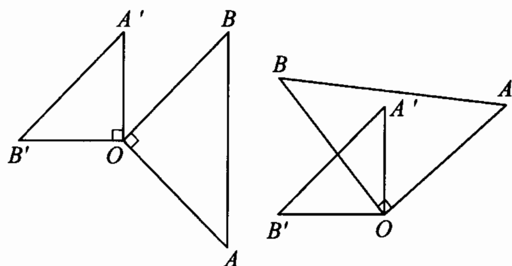


图 38

问题 319 如图 39,给定任意$\triangle ABC$,P 和 Q 分别是以 AB 和 AC 为一边的两个(向外的)正方形的中心. 证明:如果 M 是 BC 的中点,则$\triangle MPQ$ 是等腰直角三角形.

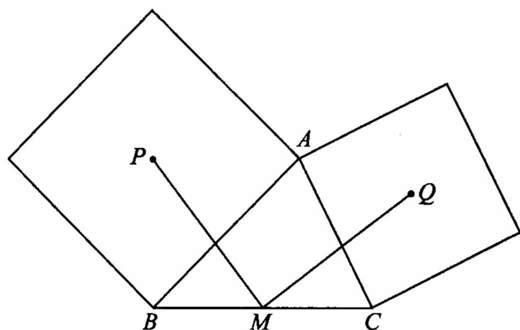


图 39

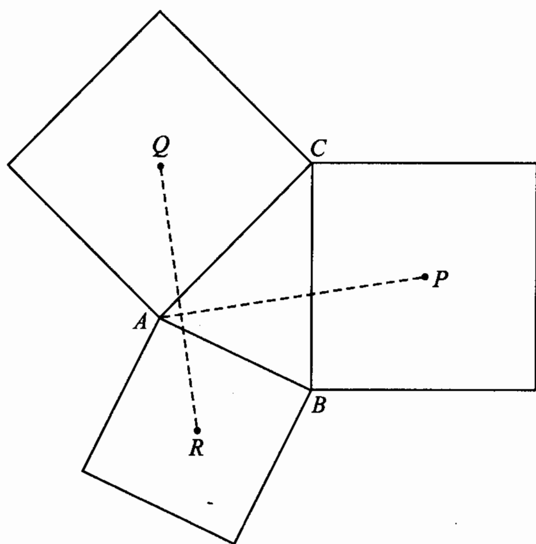


图 40

问题 320 (1) 设 P、Q、R 分别是以$\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 为一边的(向外的)正方形的中心(见图 40),证明:$\overline{AP}=\overline{QR}$,且 $AP\perp QR$;

(2) 已知 $ABCD$ 是一个凸四边形,P、Q、R、S 分别是以 AB、BC、CD、DA 为一边向外作的正方形的中心(见图 41),证明:$\overline{PR}=\overline{QS}$,且 $PR\perp QS$.

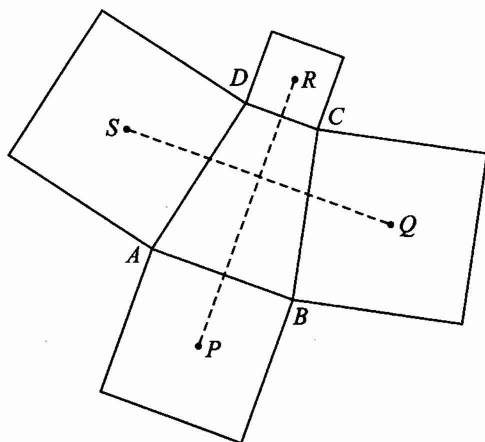


图 41

问题 321 设$\triangle ABC$ 的三个内角满足$\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$. 作圆,使其与三角形的三边各交于两个不同的点(见图 42).

(1) 证明:这种圆的半径的下限等于$\triangle ABC$ 的内切圆半径;

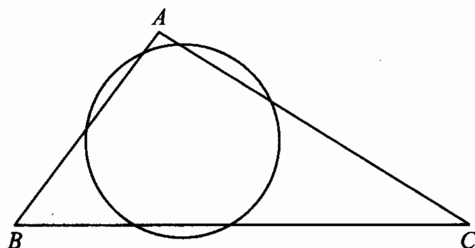


图 42

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

(2) 证明:这种圆的半径的上限并不一定等于$\triangle ABC$的外接圆的半径R. 求出用R、A和B表示的这个上限的表达式.

问题 322 (1) 设$f(n)$表示$x+2y=n$的解(x,y)的对数,其中x和y都是非负整数,证明:

$$f(0)=f(1)=1,$$
$$f(n)=f(n-2)+1,\quad n=2,3,4,\cdots,$$

求出$f(n)$的一个简单的显式公式;

(2) 设$g(n)$表示$x+2y+3z=n$的解(x,y,z)的组数,其中x、y和z都是非负整数,证明:

$$g(0)=g(1)=1,\quad g(2)=2,$$
$$g(n)=g(n-3)+\left[\frac{n}{2}\right]+1,\quad n=3,4,5,\cdots,$$

其中

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{ 为偶数}),\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

问题 323 求方程

$$3x^2+y^2+z^2=2x(y+z)$$

的实数解.

问题 324 一支铅笔、一块橡皮和一本笔记本共计一美元. 一本笔记本的价钱比两支铅笔的价钱贵,三支铅笔的价钱比四块橡皮的价钱贵,而三块橡皮的价钱比一本笔记本的价钱贵. 每种物品的单价是多少(假定每种物品的单价都是整的美分数)?

问题 325 设A是一个数字方阵,s是大于或等于每一行的和及每一列的和的任何一个数. 证明:可以将矩阵中的每一个元素都用一个不小于这个元素的数来代替,使所得到的新矩阵B的每一行的和与每一列的和都等于s.

例如(为方便起见,矩阵的元素都取作整数)

$$A=\begin{pmatrix}3&-5&2\\-6&4&1\\1&0&8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}14&-5&2\\-4&14&1\\1&2&8\end{pmatrix}$$

$$s=11$$

行和:0,−1,9　　　　行和:11,11,11

列和:−2,−1,11　　　列和:11,11,11

问题 326 观察下列各式:

$$2^2+3^2+4^2+14^2=15^2,$$
$$4^2+5^2+6^2+38^2=39^2,$$
$$6^2+7^2+8^2+74^2=75^2,$$
$$8^2+9^2+10^2+122^2=123^2.$$

确定这些等式所反映的一般规律,并证明之.

问题 327 给定三个同心圆,其中最大圆的半径小于两个较小圆的半径之和. 求作一个等边三角形,使这个三角形的顶点分别落在三个圆上.

问题 328 10000! 的尾部共有多少个零?

问题 329 某人正在一座铁路桥上,桥的一端为A,另一端为B,他离A处的距离为桥长的$\frac{3}{8}$. 他听到一列火车正向A处驶来,火车的速度是 80 kph. 如果他跑向A,他将与火车在A处相遇,如果他跑向B,火车将在B处追上他. 这人的速度是多少?

问题 330 设数列$u_1,u_2,u_3,\cdots$有如下定义:

$$u_1=1,\ u_{n+1}=u_n+8n\ (n=1,2,3,\cdots).$$

证明:$u_n=(2n-1)^2$.

问题 331 证明:下面两个多项式当变量取实数值时都是非负的,但是每一个都不能表示为若干个实多项式的平方和.

(1) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+w^4-4xyzw$;

(2) $x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2-3x^2y^2z^2$.

问题 332 (1) 对于怎样的实数 p 和 q，多项式 $x^3-px^2+11x-q$ 的根是三个连续整数？并求在这种情形下的根；

(2) 对于怎样的实数 p 和 q，多项式 $x^3-px^2+11x-q$ 恰有一个(三重)实根？这个根是什么？

问题 333 证明：对一切正整数 n，$2^{2n}+24n-10$ 都能被 18 整除.

问题 334 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是取自集合 $\{1,2,\cdots,2n-2,2n-1\}$ 中的不同整数. 证明：必有指标 i 和 j(不一定相异)，使 $a_i+a_j=2n$.

问题 335 任给 $n+2$ 个整数，证明：其中必有两个整数，它们的和或差能被 $2n$ 整除.

问题 336 已知 $\triangle ABC$，D 是它的外接圆上不同于 A、B、C 的点. 证明：由 D 分别向三角形的三边(或其延长线)所作垂线的三个垂足共线.

问题 337 设 u、v 是两个实数，且 u、v 及 uv 为某个有理系数的三次多项式的三个根. 证明：至少有一个根是有理数.

问题 338 设 n 是一个整数. 证明：n^2+1 与 $(n+1)^2+1$ 的最大公因数等于 1 或 5.

问题 339 不使用数表，计算：

(1) $\cos 36°-\cos 72°$；

(2) $\cos 36°\cdot\cos 72°$.

问题 340 不使用计算器，证明：$7^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{4}}<7$ 和 $4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}}>4$.

问题 341 两个人玩下列游戏：第一个人先任选一个 1 到 11 之间的数(包括 1 和 11)，第二个人再在这个数上任意加上一个 1 到 11 之间的数(包括 1 和 11). 如此交替进行，先加到 56 的那个人为赢家. 此游戏对谁有利？

问题 342 一个半径为 r 的圆内切于一个半径为 R 的扇形. 扇形的弦长为 $2a$. 试求 r、R 和 a 之间的一个关系，要求每个变量恰用一次.

问题 343 平行四边形的每一个顶点都用直线与两条对边的中点相连(见图 43). 这些直线所围图形的面积是平行四边形面积的几分之几？

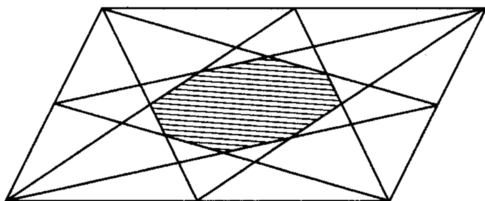


图 43

问题 344 设 u 是介于 0 与 1 之间的任意一个固定的数，即 $0<u<1$. 如下构作数列 $u_1,u_2,u_3,\cdots$：

$$u_1=1+u,$$
$$u_2=\frac{1}{u_1}+u,$$
$$u_3=\frac{1}{u_2}+u,$$
$$\vdots$$

即当 $n=2,3,4,\cdots$ 时，$u_n=\frac{1}{u_{n-1}}+u$. 是否会出现 $u_n\leqslant 1$？

问题 345 (1) 证明：任何两个连续正整数互素；(注：如果两个整数的公因数只有 1，则称这两个整数互素. 一般地，a 和 b 的最大公因数记作 (a,b)，从而 a 和 b 互素记作 (a,b)

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$=1.$)

(2) 求一个与 $2,3,4,\cdots,n$ 都互素的正整数;

(3) 设 r 是一个正整数,求正整数 $t\geqslant r$,使对 $i=1,2,3,\cdots,r$,有

$$(r+i,t+r+i)=1.$$

问题 346 假如你的计算器不能正常运算——不能做乘法,但却能够做加法(和减法),也能求任何一个数 x 的倒数 $\frac{1}{x}$. 你仍然能够使用这个有缺陷的计算器去做乘法吗?

问题 347 平面的一个非空真子集能有三条以上非共点的对称轴吗?(集合的对称轴就是将集合反射到它自身的直线.)

问题 348 观察下列式子:

$$3+5=8=2^3,$$
$$5+7=12=2^2\times 3,$$
$$7+11=18=2\times 3^2,$$
$$11+13=24=2^3\times 3.$$

证明:如果 p 与 q 是任意两个连续的奇素数,则 $p+q$ 至少是三个素数(不一定相异)的乘积.

问题 349 (1) 证明:$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不是有理数;

(2) 已知 m 和 n 是正整数,在什么条件下 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 是有理数?

问题 350 设 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是一条直线上的 m 个点,$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 是另一条与该直线平行的直线上的 n 个点. 作所有的线段 P_iQ_j. 则交点个数的最大值是多少?

问题 351 分解因式:$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

问题 352 不使用竖式乘法,也不使用电脑或计算器,证明:

(1) $13!=112296^2-79896^2$;

(2) $240^4+340^4+430^4+599^4=651^4$.

问题 353 对 $n=1,2,3,\cdots$,求

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

的简化形式.

问题 354 设 k、m 和 n 是具有下述性质的三个正整数:存在数 $x\neq 1$,使 $\log_k x$、$\log_m x$、$\log_n x$ 是某个等差数列中的连续的三项. 证明:

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

问题 355 解下列含有100个未知量的由100个方程组成的方程组:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3+x_4=0,\\ \quad\vdots\\ x_{98}+x_{99}+x_{100}=0,\\ x_{99}+x_{100}+x_1=0,\\ x_{100}+x_1+x_2=0.\end{cases}$$

问题 356 证明:对任何实数 x、y 及任何正整数 n,有:

(1) $0\leqslant[nx]-n[x]\leqslant n-1$;

(2) $[x]+[y]+(n-1)[x+y]\leqslant [nx]+[ny]$.

($[z]$表示不超过 z 的最大整数.)

问题 357 使用"曲尺"将一线段两等分.(曲尺可以用来画经过两点的直线,也可以过直线上的任何一点画这条直线的垂线.)

问题 358 设 p 是一个三角形的周长,而 m 是这个三角形的三条中线的长度之和. 试证明:

$$\frac{3}{4}p<m<p.$$

问题 359 (1) $29\sqrt{14}+4\sqrt{15}$和 124 哪个大?

(2) $759\sqrt{7}+2\sqrt{254}$和 2040 哪个大?

(请勿使用计算器.)

问题 360 观察下列各式:

$1=1^2$,

$2=-1^2-2^2-3^2+4^2$,

$3=-1^2+2^2$,

$4=-1^2-2^2+3^2$,

$5=1^2+2^2$,

$6=1^2-2^2+3^2$.

由此猜想:任何一个正整数 n 都可表示为

$$n=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^3+\cdots+\varepsilon_m m^2,$$

其中 m 是正整数,$\varepsilon_i=1$ 或 -1,$i=1,2,\cdots,m$. 证明这个猜想.

问题 361 设 M 是一个圆的圆心,A、B 是圆上两点,且不是圆的直径的两个端点. A、B 处的切线交于 C. 设 CM 交圆于 D,并设 D 处的切线分别交 AC 和 BC 于 E 和 F(见图 44).

(1) 证明:四边形 $ADBM$ 的面积是 $\triangle ABM$ 和四边形 $ACBM$ 的面积的几何中项;

(2) 证明:五边形 $AEFBM$ 的面积是四边形 $ADBM$ 和四边形 $ACBM$ 的面积的调和中项.

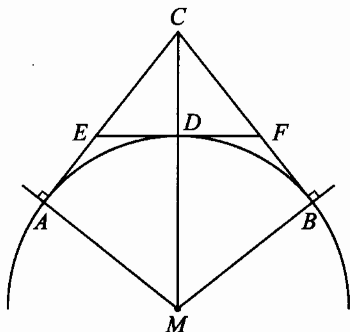


图 44

问题 362 两个首位数字不同的正整数相乘,是否有可能乘积的首位数字严格介于这两个乘数的首位数字之间?

问题 363 某人家里的钟停了,他给钟上了发条,但手头却没有正确的时间让他核对. 于是他把钟留在家里,步行到他朋友家去. 朋友家的钟是准的. 他在朋友家待了一会儿就告别回家(与他前面去时所花的时间一样). 虽然不知道他在路上走了多长时间,但一到家,他立刻将时钟拨到了准确的时刻. 请解释原因.

问题 364 一赌徒和他的朋友投掷硬币赌博,赌注是他手头所有钱数的一半. 如果硬币正面朝上,则他赢,否则他输. 每投掷一次硬币,清一次赌账. 赌博不断进行,每次的赌注都是他手头所有钱数的一半. 最后,这赌徒输的次数恰好等于他赢的次数. 那么他是赢了? 输了? 还是正好不输不赢?

问题 365 人口普查员在门廊上遇到一个人,就问他:"你家里人的年龄各是多少?"这人回答:"我家每个人的年龄都是整平方数. 我的年龄是我妻子、儿子和女儿的年龄的和. 我父亲的年龄是我、我妻子和我女儿的年龄的和. 而且父亲已过盛年,他的年龄是一个素数."这个人口普查员应当怎样记录这家人的年龄呢? 他对那人的妻子的年龄又该作什么明显的注记呢?

【译者注】 这个人的父亲属于另外一个家,不算在"家里人的年龄"中.

问题 366 (1) 给定平面上的五个点,作五边形,使给定的五个点为这五边形各边的中点;

(2) 是否总能够作出一个 n 边形,使这 n 边形的 n 条边的中点恰为给定的 n 个点?

问题 367 设 M 为线段 AB 上任意一点. 如

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

图 45 作正方形 $AMCD$ 和 $MBFE$，令 N 为这两个正方形的外接圆的另一个交点. 证明：直线 BC 和 AE 都经过点 N.

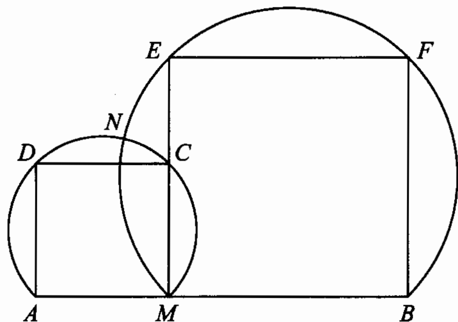


图 45

问题 368 (1) 证明：对任意正整数 n，$21n+4$ 与 $14n+3$ 互素；

(2) 对于怎样的整数 a 和 b，$7an+4$ 与 $7bn+3$ 对每一个正整数 n 都互素？

问题 369 证明：在最近一次出席渥太华国家艺术中心音乐会的人中，必有两人在出席音乐会的人中认识同样多的人.

问题 370 设 n 为一个正整数. 令

a_1 表示 $x+2y=n$ 的非负整数解 (x,y) 的对数，

a_2 表示 $2x+3y=n-1$ 的非负整数解 (x,y) 的对数，

a_3 表示 $3x+4y=n-2$ 的非负整数解 (x,y) 的对数，

⋮

直到 a_n 表示 $nx+(n+1)y=1$ 的非负整数解 (x,y) 的对数.

证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$.

例如，当 $n=7$ 时：

$x+2y=7$ 有 4 对解 $(1,3)$，$(3,2)$，$(5,1)$，$(7,0)$；

$2x+3y=6$ 有 2 对解 $(3,0)$，$(0,2)$；

$3x+4y=5$ 有 0 对解；

$4x+5y=4$ 有 1 对解 $(1,0)$；

$5x+6y=3$ 有 0 对解；

$6x+7y=2$ 有 0 对解；

$7x+8y=1$ 有 0 对解.

且 $4+2+0+1+0+0+0=7$.

问题 371 记 $a(n)$ 为将正整数 n 表示为若干个 1 与 2 的有序和的不同方法的种数. 例如，因为

$$\begin{aligned}5&=1+1+1+1+1=2+1+1+1\\&=1+2+1+1=1+1+2+1\\&=1+1+1+2=2+2+1=2+1+2\\&=1+2+2,\end{aligned}$$

所以 $a(5)=8$.

记 $b(n)$ 为将正整数 n 表示为若干个大于 1 的整数的有序和的不同方法的种数. 例如，因为

$$\begin{aligned}7&=3+2+2=2+3+2=2+2+3\\&=3+4=4+3=2+5=5+2=7,\end{aligned}$$

所以 $b(7)=8$.

证明：对 $n=1,2,\cdots,a(n)=b(n+2)$.

问题 372 5 个赌徒 A、B、C、D、E 在一起赌博，每一轮都产生 1 个输者，并且输者要付给其他 4 人与他们各人所有的钱数同样多的钱. 这样，如果开始时各人分别有 α、β、γ、δ、ε 美元，假如 B 输了，则 B 就要分别付 α、γ、δ、ε 美元给 A、C、D、E. 这之后，A、B、C、D、E 分别有 2α、$\beta-\alpha-\gamma-\delta-\varepsilon$、$2\gamma$、$2\delta$、$2\varepsilon$ 美元. 他们共赌了 5 轮，A 输了第一轮，B 输了第二轮，C 输了第三轮，D 输了第四轮，E 输了第五轮. 最后，当 E 付完钱以后，他们发现大家的钱都一样多了，即每个人所拥有的美元数都是同一个整数. 在赌博开始时，各人至少需有多少钱？

问题 373 考虑一个 m 行 m 列的数字方阵. 设 a_{ij} 表示位于第 i 行、第 j 列的数. 对每一个 i，以 r_i 表示第 i 行的数的和，c_i 表示第 i

列的数的和. 证明:存在两个不同的指标 i 和 j,使$(r_i-c_i)(r_j-c_j)\leqslant 0$.

问题 374 设对任意的实数 a 和 b,函数 f 具有性质

$$|f(a)-f(b)|\leqslant|a-b|^2.$$

证明:f 是一个常函数.

问题 375 在一次 1 千米的行驶测试中,加装火箭发动机的汽车的速度从 0 kph 增加到 240 kph. 如果在行驶过程中加速度不允许增加(但允许减少),汽车跑完这段路最多需要多长时间?

问题 376 大跳蚤,

背上驮着小跳蚤;

小跳蚤,

紧紧咬着大跳蚤;

小跳蚤,

背上还有小跳蚤.

一个一个背上驮,

直到永远无止息.

如果最底层的跳蚤重$\sqrt{2}$克,而别的跳蚤重$\sqrt{2-x}$克,其中 x 表示驮着它的(当然也是被它咬着的)那个跳蚤的重量. 那么最上面的跳蚤有多重?

问题 377 设 r 为二次方程 $x(1-x)=1$ 的一个根,而另一个根为 $1-r$. 证明:对 $n=1,2,3,\cdots$,都有

$$r^n+(1-r)^n=\begin{cases}2(-1)^n & (3\text{ 整除 }n),\\(-1)^{n-1} & (3\text{ 不整除 }n).\end{cases}$$

问题 378 莱姆布雷恩先生总是坚持不懈地锻炼自己的智力. 这天早上他去给他家草坪的一块地铺草皮,那块地的形状如图 46 所示. 他有 31 块草皮,每块草皮长 2 英尺宽 1 英尺. 他打定主意不切开每块草皮来铺满地面. 但直到这天下午,他仍在手忙脚乱地不停摆放着一块块的草皮. 你能帮他摆脱困境吗?

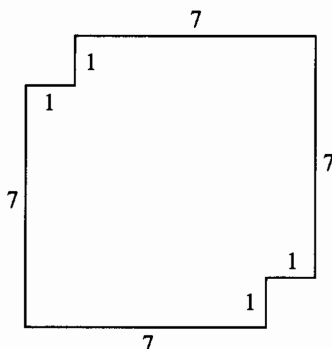


图 46

问题 379 斐波那契数列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$由

$$f_1=f_2=1,f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\quad(n\geqslant 3)$$

所定义. 于是这数列就是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots.$$

设

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},$$

证明:对 $n=2,3,4,\cdots$,

$$Q^n=\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}.$$

并证明:对 $n=1,2,3,\cdots$,等式 $f_{3n}=f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3$成立.

问题 380 证明:函数

$$f(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$$

是集合$\{(x,y)|x、y$ 是大于等于零的整数,且 $x^2+y^2>0\}$(第一象限中除(0,0)外的格点)到正整数集$\{m|m$ 是大于零的整数$\}$的一一对应.

问题 381 两个同样大小的正四面体相交成如下情形:每一个四面体的各个面都过另一

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

个四面体的三条共点的棱的中点. 这两个正四面体的并集 U 组成一个三维的"星". 描述这两个正四面体的交集 V,并计算 U 和 V 的体积的比值.

问题 382 证明:对 $n=1,2,3,\cdots$,

$$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$$

不是一个整数的平方.

问题 383 一个有8位棋手的棋社决定把棋手们平均分为两队进行比赛. 这些棋手分别有1、2、3、5、8、10、11和12年的下棋经历. 棋社决定,分成的两队棋手各自下棋经历的总年数要相同. 当两队分好以后,他们惊异地发现,不但两队棋手各自下棋经历的年数的平方和相同,而且立方和也相同. 他们是如何分队的?

问题 384 一个制造商要运送150台洗衣机到邻近的镇上去. 经过了解,他知道有两种型号的卡车可用. 一种是大的,每辆可装18台洗衣机,一种是小的,每辆可装13台洗衣机. 运费为每辆大卡车35美元,每辆小卡车25美元. 怎样安排运送才最经济?

问题 385 两艘轮船 S 和 T 分别在直线航道上匀速航行. 10:00时,它们相距5千米;11:00时,它们相距4千米,而在13:00时,它们相距10千米. 在7:00时,S 在 T 的正西方.

(1) 在7:00时,它们相距多远?

(2) 何时它们相距26千米?

(3) 它们最近时相距多远? 何时相距最近?

(4) 何时 S 在 T 的正北方?

(5) 何时 S 在 T 的西南方?

(6) 假如 S 和 T 的速度相同,且 T 向正南方航行,那么 S 的速度和航行方向是什么?

问题 386 (1) 如果一个正六边形与一个正三角形的周长相同,求它们的面积之比;

(2) 给定一个圆,求它的外切正六边形与内接正六边形的面积之比.

问题 387 点 P 分△ABC 的边 BC 为 $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{1}{2}$,且 $\angle CBA=45°$,$\angle APC=60°$(见图47). 不使用三角函数,求 $\angle ACB$.

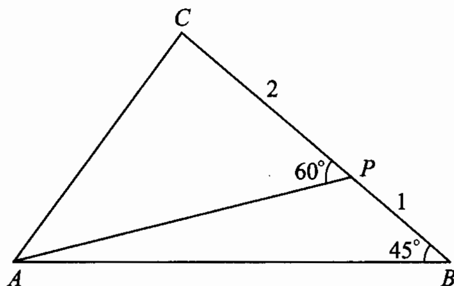


图 47

问题 388 设 l 和 m 为两条平行直线,P 为它们之间的一个点. 求面积最小的△APB,使 A 在 l 上,B 在 m 上,且 $\angle APB=90°$.

问题 389 画出方程

$$|3x^2+y^2-12|=|x^2-y^2+4|$$

表示的图形.

问题 390 设 p 是大于3的素数. 证明:介于1到 $p-1$ 之间(含)的(p 的)二次剩余之和可被 p 整除. (有关的定义参见工具箱B11.)

问题 391 △ABC 在顶点 A 处的内角和外角的平分线分别交 BC 或其延长线于点 D 和 E(见图48). 如果 $\overline{AD}=\overline{AE}$,求 $\angle BCA-\angle CBA$.

问题 392 (1) 观察下列式子:

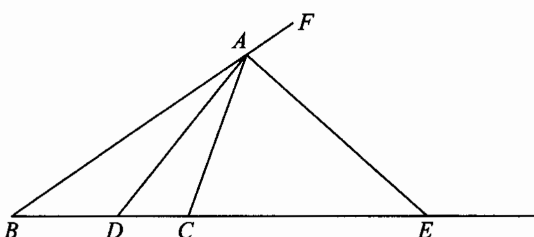


图 48

$$9^3+15^3+12^3=18^3,$$
$$28^3+53^3+75^3=84^3,$$
$$65^3+127^3+248^3=260^3,$$

找出一般规律；

(2) 观察下列式子：

$$3^3+4^3+5^3=6^3,$$
$$12^3+19^3+53^3=54^3,$$
$$27^3+46^3+197^3=198^3,$$

找出一般规律；

(3) 观察下列式子：

$$3^3+10^3+18^3=19^3,$$
$$12^3+31^3+102^3=103^3,$$
$$27^3+64^3+306^3=307^3,$$

找出一般规律.

问题 393 设 P 是一个非自相交的具有 n 条边的多边形(见图 49a). 在 P 内给定了另外 m 个点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$(见图 49b). 通过联结这 $n+m$ 个点中的一些点,将这个多边形分割成一些三角形,使没有一个三角形的内部含有 P_i 或 Q_j,也没有一条边的内部含有 Q_j. 存在多种分割的方法. 图 49c 和图 49d 显示了对图 49b 的许多分割方法中的两种. 证明:对各种分割方法,所分割成的三角形的个数是相同的,并求出一个用 n 和 m 表示三角形个数的公式.

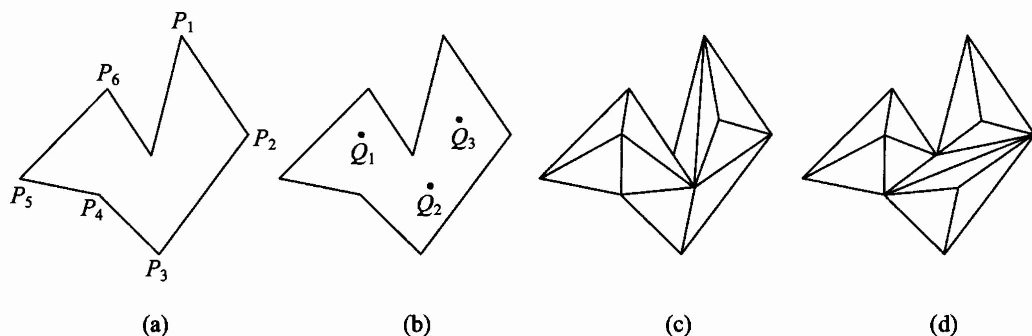


图 49

有一次,怀特海(A. N. Whitehead)就一种逻辑理论告诫一名学生说:"你研究它时必须带一点点呃……嗯……啊……"过了大约一分钟,怀特海还没找到恰当的字眼,这时这名学生提示道:"盐? 教授。""啊,对,"怀特海面露喜色,"我知道那是一种化学品。"

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-$

$2(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)\leqslant 6.$

问题 395 已知等边$\triangle ABC$,在 AB 上取点 D,AC 上取点 E,使$\overline{AD}=\overline{AE}$. 如图 50 作三个等边三角形$\triangle PCD$、$\triangle QAE$ 和$\triangle RAB$. 证明:

(1) $\triangle PQR$ 是等边三角形;

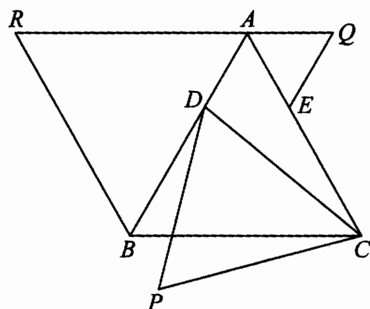


图 50

(2) PE、AQ 和 RD 的中点是某个等边三角形的三个顶点.

问题 396 设 T 为以(3,0)为圆心、3 为半径的圆. 对任意的 $h(0<h<6)$,设以 O 为圆心、h 为半径的圆交 y 轴正半轴于A,交 T 的上半圆于 B(见图 51). 设 E 是AB 的延长线

是这样,能有多远呢? 或者 E 会向 O 吗? 又能有多近呢?

问题 397 对任意的正有理数 u,约定称 1 与$\frac{u}{u+1}$为 u 的“孩子”. 证明:每一个 理数都以唯一的方式成为 1 的“后代”.

问题 398 设 Q 是一个四边形,它的边 是正整数,且其中任何三个数的和都是 个数的倍数. 证明:Q 必有一对等长的边

问题 399 今有一个矩形的点阵,其行 列数都是偶数. 按下面的规则用红或蓝 颜色给这些点着色:每一行中,有一半的 红色,一半的点着蓝色;每一列中也有一 点着红色,一半的点着蓝色. 如果两个 样颜色的点(在同一行或同一列中)相邻 用与这两个点同色的线段将它们相连 明:蓝色线段的条数等于红色线段的条数

问题 400 在一个有多于 3 个人参加的 上,每 4 个人中就有一个人与其余三个 识. 证明:除了三个人可能例外以外,其 个人都与所有的人相识.

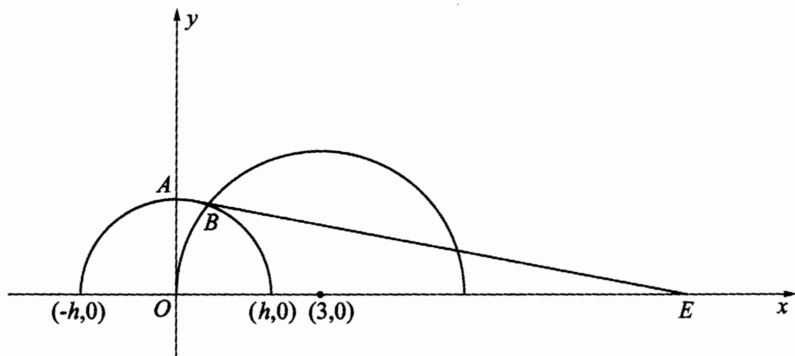


图 51

问题 401 凭直觉可知，内接于给定正 n 边形的最小正 n 边形的顶点必定在给定的正 n 边形的各边中点上. 请给出证明!

问题 402 实数 x、y、z 满足

$$\begin{aligned}&x^2+(1-x-y)^2+(1-y)^2\\=&y^2+(1-y-z)^2+(1-z)^2\\=&z^2+(1-z-x)^2+(1-x)^2.\end{aligned}$$

求 $x^2+(1-x-y)^2+(1-y)^2$ 的最小值.

问题 403 求四次方程 $x^4-4x=1$ 的全部根.

问题 404 设对任意的实数 x，多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 满足恒等式 $P(Q(x))=Q(P(x))$. 证明：如果方程 $P(x)=Q(x)$ 没有实数根，则方程 $P(P(x))=Q(Q(x))$ 也没有实数根.（1980 年加拿大数学奥林匹克竞赛试题）

问题 405 求

$$P=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{(abc)^2}$$

的最大值，其中 a、b、c 为实数，且

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2.\ (*)$$

问题 406 能否找到三元实数组 (a,b,c)，使其中每一个数都不是整数的立方，且对任意的正整数 n，

$$S_n=a^{\frac{n}{3}}+b^{\frac{n}{3}}+c^{\frac{n}{3}}$$

都是整数?

问题 407 设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一个多边形的边长. 证明：对 $k=1,2,\cdots,n$，

$$\frac{n+2}{S-a_k}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S-a_i}.$$

问题 408 凭直觉可知，如果一个矩形内接于一个椭圆，则这个矩形的边与椭圆的轴平行. 请给出证明.

问题 409 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的矩形面积的最大值.

问题 410 设 w 和 z 都是复数，证明：

$$\begin{aligned}&2|w||z||w-z|\\\geqslant&(|w|+|z|)\big||w|z-z|w|\big|.\end{aligned}$$

问题 411 设 a、b 为两个不相等的实数，证明：方程

$$\begin{aligned}&(a-b)x^n+(a^2-b^2)x^{n-1}+\cdots+\\&(a^n-b^n)x+a^{n+1}-b^{n+1}=0\qquad(1)\end{aligned}$$

至多有一个实根.

问题 412 设

$$a_0\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,$$

证明：多项式

$$P(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

的任意一个根 r 都满足 $|r|\leqslant1$，即所有的根都在复平面上的以原点为圆心的单位圆内或圆上.

问题 413 许多数列有漂亮的求和公式，例如等差数列与等比数列的求和公式，还有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

试建立下列求和公式：

$$S_n=[1^{\frac{1}{2}}]+[2^{\frac{1}{2}}]+\cdots+[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}],\quad n=2,3,\cdots,\qquad(1)$$

$$T_n=[1^{\frac{1}{3}}]+[2^{\frac{1}{3}}]+\cdots+[(n^3-1)^{\frac{1}{3}}],\quad n=2,3,\cdots.\qquad(2)$$

（$[x]$表示不超过 x 的最大整数.）

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 414 图 52 中,7 个整数在放置成环状的 7 个圆盘中.它们具有如下的性质:1,2,…,14 中的每一个整数或者在某个盘中,或者是相邻两个盘中的整数的和.你能否重新放置盘中的整数,使 5 不在盘内,而仍然保持原有的性质?

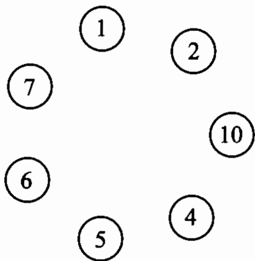


图 52

问题 415 将数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 按一定的次序填入 10 个空格中,使下列除式的余数为 1981.

$3168\overline{)\,71_543_2_985_2_356_8_7_836_7_39997}$.

(莱奥·莫泽)

问题 416 求所有满足 $\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=0$ 的$\triangle ABC$.

问题 417 证明:3 个不相等的素数的 m 次根(m 是>1 的整数)不可能是一个等比数列(不必连续)中的若干项.

问题 418 一条任意的简单闭曲线可能有不止一条长度最大的弦.例如,所有的直径都是圆的长度最大的弦.与此形成对照的是,正规的椭圆却只有一条长度最大的弦(即长轴).证明:没有两条简单闭曲线的长度最大的弦是平行的.

问题 419 证明:两个有界图形至多有两个位似中心.

问题 420 一枚飞行中的飞弹同时被 3 个雷达站所监视.这些雷达站位于一个边长为 a 的等边三角形的 3 个顶点上.已测出飞弹到 3 个雷达站的距离,按三角形 3 个顶点的顺序依次为 R_1、R_2 和 R_3.求飞弹相对于三角形所在平面的高度.

问题 421 设 APB、CPD 和 EPF 为球内三条互相垂直且交于公共点 P 的弦.如果 $\overline{AP}=2a$,$\overline{PB}=2b$,$\overline{CP}=2c$,$\overline{PD}=2d$,$\overline{EP}=2e$,且$\overline{PF}=2f$,求球的半径 R.

问题 422 取 7 张纸片,将其中的几张纸片每张都裁成 7 张小纸片,再将其中的一些小纸片每张又裁成 7 张更小的纸片,如此不断重复.最后,当这个过程停下来时,发现纸片的总数是 1988 与 1998 之间的某个数.由此能确定纸片的准确数吗?

问题 423 如果允许堆叠,至少需要多少次切割,才能把一个 $a\times b\times c$ 的立方体切割成 abc 个单位立方体?(莱奥·莫泽)

问题 424 已知一个非共面的六边形的对边互相平行.证明:这个六边形的六条边的中点共面.

问题 425 给定两个相切的等圆.自切点起,两个质点分别在两个圆上按逆时针方向以同样的速度(不一定匀速)运动(见图 53).证明:相对于其中一个质点来说,另一个质点仿

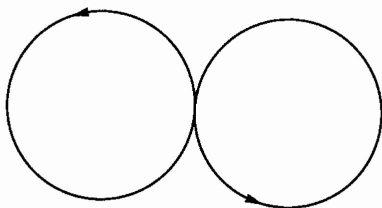


图 53

佛是在一个半径为 $2R$（R 为已知圆的半径）的圆上运动.

问题 426 求经过抛物线内某个定点的所有弦的中点的轨迹.

问题 427 令 $G(n)$ 表示最接近于 $\frac{(n+3)^2}{12}$ 的整数. 例如：

$$G(1)=1,\quad G(2)=2,\quad G(3)=3,$$
$$G(4)=4,\quad G(5)=5,\quad G(6)=7.$$

证明：

$$G(n)=G(n-6)+n,\qquad n=7,8,9,\cdots.$$

问题 428 如果从最前面的 m 个正整数中任选 n 个数，则在剩下的 $m-n$ 个数中至少有一个是另一个的因子. 那么对于 m 而言，能使上述论断成立的 n 的最大值是什么？(Student-Faculty Colloquium, Carleton College)

问题 429 猜想：如果 $f(t)$、$g(t)$、$h(t)$ 都是实变量的实值函数，则存在实数 x、y、z，使 $0\leqslant x$、y、$z\leqslant 1$，且

$$|xyz-f(x)-g(y)-h(z)|\geqslant\frac{1}{3}.$$

证明这个猜想. 并证明：如果 $\frac{1}{3}$ 被任何一个常数 $c>\frac{1}{3}$ 代替，则上述猜想不成立，即猜想中的 $\frac{1}{3}$ 是最佳可能.

问题 430 由欧几里得几何可知，三角形的内角之和是一个常数. 证明：一个四面体的两面角之和却不是常数. (1979 年加拿大数学奥林匹克竞赛试题)

问题 431 数字表达式 $x_nx_{n-1}\cdots x_1x_0$ 既是数 A 的 a 进制表示，又是数 B 的 b 进制表示；同时，数字表达式 $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ 是数 C 的 a 进制表示，也是数 D 的 b 进制表示. 其中 a、b、n 都是大于 1 的整数.

证明：当且仅当 $a>b$ 时 $\frac{C}{A}<\frac{D}{B}$.

问题 432 证明：球面上 5 个或更多的大圆，若其中没有 3 个是共点的，则至少确定一个具有 5 边或更多边的球面多边形.（莱奥·莫泽）

问题 433 确定所有满足

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$$

的整数三元组 (x,y,z).

问题 434 求所有满足下式的 x：

$$16(\sin^5 x+\cos^5 x)=11(\sin x+\cos x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

问题 435 设 $a_{n+1}=\frac{1+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$，且 $a_1=a_2=a_3=1$，证明：当 $n=4,5,\cdots$ 时，a_n 都是整数.

问题 436 证明：如果 a、b、c、d 都是正整数，且 $ab=cd$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 是合数.（联邦德国奥林匹克数学竞赛试题）

问题 437 将由 13 张不同的扑克牌组成的一叠牌按同一种特定的方式不断重复洗牌，则最多需要多少次，才能使这叠扑克牌回复到最初状态？

问题 438 证明：如果

$$\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ca-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}=0,$$

则也有

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

问题 439 设 a、a'，b、b' 和 c、c' 是一个任意四

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

面体的三对对棱长，证明：

(1) 存在一个以 $a+a'$、$b+b'$ 和 $c+c'$ 为边长的三角形；

(2) (1)中的三角形是锐角三角形.

问题 440 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内，求

$$\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$$

的最大值.

问题 441 设 u_n 是数列

$$1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,\cdots$$

的第 n 项，其中数列是由一个奇数后跟两个偶数，再接三个奇数，再跟四个偶数等等组成. 证明：

$$u_n=2n-\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})\right],$$

其中方括号表示取最大整数的函数.

问题 442 设 e 与 f 是一个面积为 F 的四边形的对角线长，证明：$e^2+f^2\geqslant 4F$，并确定何时等号成立.

问题 443 在一个边长为 15 单位的立方体内有 11000 个给定的点. 证明：在这个立方体中必有一个半径是单位长度的球，包含了至少 6 个给定的点.

问题 444 市场上可见一种三维的画圈打叉游戏，这是对通常的在井字格中画圈打叉游戏的实质性改进. 一个 $4\times4\times4$ 的立方体(见图 54)被隔成 64 个单元，参加游戏的人依次交替地将代表他的色彩的筹码置于某个单元中. 第一个将他自己的四个筹码排成一条线的人获胜. 有多少种不同的方式做到这一点呢？

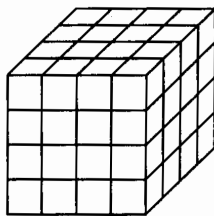


图 54

问题 445 证明：在一副洗好的扑克牌(不包括大小王)中，如果上面 26 张牌中的红牌数多于下面 26 张牌中的黑牌数，则在这副牌中，至少有 3 张连着的牌是同色的.（莱奥·莫泽）

问题 446 木工问题：一个木工有 4 块锯成如图 55 所示的等腰梯形形状的木板. 每一块的 x 和 y 都是整英寸数. 虽然每一块木板的 x 和 y 都不相同，但它们的面积却是同一个小于 40 的整平方英寸数. 这四块木板的尺寸各是多少？

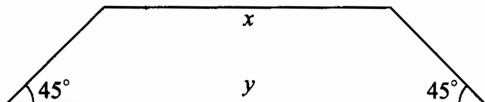


图 55

问题 447 如果 m 和 n 都是正整数，证明：

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1.$$

问题 448 在一本老版本的书 *Ripley's Believe It Or Not* 中，指出

$$N=526315789473684210$$

是一个恒数，即如果它被任何一个正整数乘，所得的乘积总包含 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字，其中数字的次序可以不同，也可能有重复.

(1) 证明或否证上述结论；

(2) 是否存在比上述数更小的恒数？

问题 449 如果 a、b、c、d 为实数，证明：

当且仅当$\begin{cases}a^2+c^2=2,\\ b^2+d^2=2,\\ ab=cd,\end{cases}$ 时，

$\begin{cases}a^2+b^2=2,\\ c^2+d^2=2,\\ ac=bd.\end{cases}$

问题 450 在 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中，有多少个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，能使 $a_1\neq 1$ 且/或 $a_2\neq 2$？

问题 451 某人和他的孙子是同一天生日．有一年的生日这一天，这人注意到，他的年龄是他孙子年龄的整数倍，并且这种现象还将延续到随后的五个生日．这一年这人的年龄有多大？

问题 452 证明 $\log_{10}2$ 是个无理数．

问题 453 给定 75 个共面的点，其中任何三点都不共线．证明：由这些点作为顶点所构成的所有三角形中，锐角三角形的个数不超过 70%．

问题 454 设 T_1 和 T_2 是两个锐角三角形，它们的边长分别是 a_1、b_1、c_1 和 a_2、b_2、c_2，面积分别是 Δ_1 和 Δ_2，外接圆半径分别是 R_1 和 R_2，内切圆半径分别是 r_1 和 r_2．证明：如果 $a_1\geqslant a_2$，$b_1\geqslant b_2$，$c_1\geqslant c_2$，则 $\Delta_1\geqslant\Delta_2$，且 $R_1\geqslant R_2$，但却不一定有 $r_1\geqslant r_2$．

问题 455 给定两个点，这两点分别在两条给定的异面直线（即不共面的空间直线）上．证明：存在唯一的球，同这两条直线切于给定的点．

问题 456 素数链 $\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$ 满足 $p_i=2p_{i-1}-1$ 或 $p_i=2p_{i-1}+1(2\leqslant i\leqslant m)$．$\{2,5,11,23,47\}$ 和 $\{2,3,7,13\}$ 是其中的两个例子．证明：任何一个这样的素数链至多含有有限多个数．

问题 457 设 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上一点，r_1、r_2、r 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆的半径，t_1、t_2、t 分别是这些三角形的与 AM、BM、AB 相切的旁切圆半径．证明：

$$\frac{r_1}{t_1}\cdot\frac{r_2}{t_2}=\frac{r}{t}.$$

问题 458 4 个非负整数写成一个环的形式．由这个环构作一个新的环，第二个环中的元素是第一个环中相邻元素的差的绝对值．证明：如果这个过程重复足够多次，则环中四个数都变成了零．例如：

$$\begin{pmatrix}9&3\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&3\\8&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2\\2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5\\1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

问题 459 容易知道，一个正方形有无限多个内切椭圆．证明：一个给定的正五边形却只有一个内切椭圆．

问题 460 当 a、b、c 是一个三角形的边长时，求所有使 $xa^2+yb^2+zc^2\leqslant 0$ 的实数 x、y、z．

问题 461 如图 56，如果一个三角形的三条相等的塞瓦线以同样的方式分三角形的三边成等比，那么这个三角形是否一定是等边三角形？

问题 462 当 $(\tan A_1)(\tan A_2)\cdots(\tan A_n)=1$ 时，求 $(\sin A_1)(\sin A_2)\cdots(\sin A_n)$ 的最大值．

问题 463 设两个三角形的边长分别为 (a_1,b_1,c_1) 和 (a_2,b_2,c_2)，且它们的面积分别是 Δ_1

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

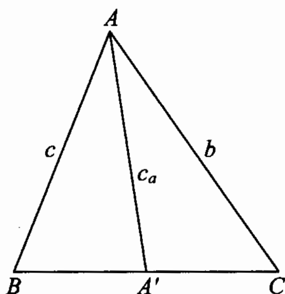


图 56

和 Δ_2. 证明纽伯格-佩多不等式：

$$a_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+b_1^2(c_2^2+a_2^2-b_2^2)+c_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)\geqslant 16\Delta_1\Delta_2,$$

并确定何时等号成立.

问题 464 易知,如果一个正 n 边形的内接 n 边形的顶点按同一方向分这个正 n 边形的边成相等的比例,则这个内接 n 边形是一个正 n 边形. 试证明这个结论的逆命题,即如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次是一个正 n 边形的顶点, $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 依次是它的内接正 n 边形的顶点,其中 B_i 在 A_i 和 A_{i+1} 之间,则 $A_iB_i=$ 常数.

问题 465 设 m 和 n 是两个给定的正数,且 $m\geqslant n$. 如果对所有的 $0\leqslant a\leqslant m, 0\leqslant b\leqslant n$,数 x 满足

$$m^2+n^2-a^2-b^2\geqslant(mn-ab)x, \quad (1)$$

则称 x 对于 m 和 n 来说是“好数”. 试求(用 m 和 n 来表示)最大的好数.

问题 466 证明:对任意一个边长为 a、b、c、d 的四边形(简单的或非简单的,平面的或非平面的)都有

$$a^4+b^4+c^4\geqslant\frac{d^4}{27}.$$

问题 467 求在下列约束条件下 x^2y 的最大值:

$$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=k(\text{常数}),$$
$$x,y\geqslant 0.$$

问题 468 证明:对任一自然数 $m>1$,

$$\frac{4^m}{2\sqrt{m}}<C_{2m}^m<\frac{4^m}{\sqrt{3m+1}}. \quad (*)$$

问题 469 求所有的有理数对 (x,y),使

$$x^3+y^3=x^2+y^2.$$

问题 470 随机投掷 n 粒均匀骰子,有奇数个六点朝上的概率是多少?

问题 471 爸爸、妈妈、我和我兄弟,
八十三是四人的年龄加一起.
爸爸的年龄乘以六,
等于妈妈的年龄乘以七.
我的年龄取三倍,
恰和妈妈的年龄一样齐.

求我家各人的年龄,请不要用分数.

问题 472 令 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 和 $[n_1,n_2,\cdots,n_r]$ 分别表示正整数集 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的最大公因数和最小公倍数. 例如 $(6,12,15)=3$ 和 $[2,3,4]=12$. 证明:

$$\frac{(a,b,c)^2}{(b,c)(c,a)(a,b)}=\frac{[a,b,c]^2}{[b,c][c,a][a,b]}.$$

(1972 USAMO)

问题 473 在编排乘式

$$(abc)(bca)(cab)=234235286 \quad (a>b>c)$$

的时候,除个位数 6 外,排字员把其余所有数字的次序都弄乱了. 请把这些数字恢复到正确的次序. (*Math. Mag.* 1959)

问题 474 画出由方程

$$(2x+3y)^2(y-x)=x+y$$

所定义的曲线.

问题 475 设

$$A_0=A,\quad A_{n+1}=\frac{A_n}{1+nA_n},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

求 A_{1990}.

问题 476 1,2,3,…,100 按一定的次序分别被 1,2,3,…,100 相乘. 证明:由此得到的 100 个乘积被 101 除,不能得到所有的正剩余.

问题 477 本问题中的实函数 f,是指对所有的实数 x,函数 $f(x)$都存在,且值是实数. 证明:仅对唯一的常数 b,存在实函数 f,使对所有的实数 x 和 y,

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+bxy.$$

问题 478 有一位机灵的小姑娘只吃切割成锐角三角形形状的馅饼. 请说明应怎样切割一个多边形形状的馅饼,使这位姑娘吃后不会有剩余. (*J. Recreational Math*. 1972)

问题 479 在一个正三角形(即等边三角形)中,外心 O、内心 I 和重心 G 是重合的. 反之,如果 O、I、G 中任何两个重合,则这个三角形是等边三角形. 同样,正四面体的 O、I、G 也重合. 证明或否证这个结论的逆命题:如果一个四面体的 O、I 和 G 重合,则此四面体为正四面体.

问题 480 证明:存在一个由形如 2^n-3 的正整数组成的无限集,具有如下性质:其中任何两个数都没有公共的素因子.

问题 481 证明:联结正 n 边形的一个顶点与其余 $n-1$ 个顶点的线段长度的倒数的平方和等于$\frac{n^2-1}{12R^2}$,其中 R 是其外接圆的半径.

问题 482 n^2 枚硬币中恰有 n 枚银币. 将这些硬币任意排成 n 行,每行 n 枚硬币. 证明:至少有一行不含有银币的概率是

$$1-\frac{(n-1)!\ (n^2-n)!\ n^{n-1}}{(n^2-1)!}.$$

(*Math. Gazette* 1904)

问题 483 已知一个具有 n 位非零数字的 b 进制整数. 证明:总可以将其中某 $r(0\leqslant r\leqslant n-1)$个非零的数字改为零,使所得到的数能被 n 整除. (莱奥·莫泽)

问题 484 求内接于给定的平行四边形(每边一个顶点)的具有最小面积的菱形. (*Math. Gazette* 1904)

问题 485 直角三角形中平行于斜边并通过内心 I 的弦被内心分为长度为 m 和 n 的两条线段. 求该直角三角形的面积(结果用 m 和 n 表示).

问题 486 若

$$a+b+c+d+e+f=0,$$

且

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0,$$

证明:

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)=(b+c)(b+d)(b+e)(b+f).$$

(*Math. Gazette*)

问题 487 证明:2739726 的 1~72 倍的每一个倍数的各位数字之和都等于 36. (E. M. 兰利, *Math. Gazette* 1896)

问题 488 对一切具有单位绝对值的复数 z_1、z_2、z_3,求满足

$$|z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2|\geqslant k|z_1+z_2+z_3|$$

的最大实数 k.

问题 489 在赛马中,如果一匹马输与赢的

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

可能性的比值是 a 比 b，我们称这匹马的貌似胜率为 $\frac{b}{a+b}$. 证明：如果在一次赛马中，所有马匹的貌似胜率之和小于1，则一定可以适当安排投注，使得不管赛马的结果如何，总能赢得相同数目的钱.（R. W. 杰尼斯，*Math. Gazette* 1896）

问题 490 证明：如果方程

$$a_0x^n-na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^na_n=0$$

的根都是正数，则对从1到 $n-1$（含）的所有 r 值，都有 $a_ra_{n-r}>a_0a_n$，除非所有的根都相等.（A. 洛奇，*Math. Gazette* 1896）

问题 491 设 $u\leqslant 1\leqslant w$. 求所有使 $u+vw\leqslant v+wu\leqslant w+uv$ 的值 v.

问题 492 求平面 $Ax+By+Cz=1$ 到椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的最短距离. 可假定 A、B、C 都是正数，且平面与椭球面不相交.（请不要应用微积分.）

问题 493 第一届威廉·洛厄尔·普特南（*William Lowell Putnam*）数学竞赛中的一个问题是：求在一端与抛物线 $y^2=2ax$ 正交的最短的弦长（假定 $a>0$）. 应用微积分可直接求解. 请给出一个完全"无微积分"的解法.

问题 494 艾丽丝和鲍勃在重复玩一个公平的游戏，每次输赢为5美分. 如果开始时艾丽丝有 a 枚5美分硬币，鲍勃有 b 枚5美分硬币，且假设游戏一直进行到有一个人输掉了所有的5美分硬币为止，则艾丽丝赢得鲍勃所有钱的概率有多大？

问题 495 设 P、Q、R 是单位正方形内或其上的任意三个点，证明：这三点两两之间的最短距离至多是 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$，即证明：

$$\min(\overline{PQ},\overline{QR},\overline{RP})\leqslant 2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

并确定何时等号成立.

问题 496 将一个长为2、宽为1的矩形内或边上的5个点两两相连，可得10条线段. 证明：这10条线段中的最短的一条至多长 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.（莱奥·莫泽）

问题 497 证明：对每一个正整数 n，丢番图方程

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}=1$$

至少有一个解.（莱奥·莫泽）

问题 498 如果一个四面体的每一个顶点处的面角之和都是180°，证明：这个四面体是等腰的，即相对的棱两两相等.

问题 499 证明：不在无限集

$$\{3,-2,2^23,-2^3,\cdots,2^{2k}3,-2^{2k+1},\cdots\}=\{3,-2,12,-8,48,-32,192,\cdots\}$$

中的每一个正整数都是这个集合中的两个或更多个不同元素的和.

问题 500 在 n 维欧几里得空间 E^n 中给定由同一点发出的 $n+1$ 条射线. 如果任何两条射线所夹的锐角都相等，求这个共同的锐角.

解　答

问题 1　设三边的长度为 $a-d,a,a+d$，有 $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$，化简得 $a(a-4d)=0$，即 $a=4d$. 因此三边的长度为 $3d,4d,5d$，它们的比为 3∶4∶5.

问题 2　记 $A(a,2a)$、$B(b,b)$ 分别为直线 $y=2x$ 和 $y=x$ 上的点，线段 AB 的中点 (x,y) 满足 $x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{2a+b}{2}$，且线段长度为 4. 于是有 $(a-b)^2+(2a-b)^2=4^2$，即 $5a^2-6ab+2b^2=4^2$，其中 $a=2(y-x)$，$b=2(2x-y)$. 由此可得 $20(y-x)^2-24(y-x)(2x-y)+8(2x-y)^2=4^2$，即 $25x^2-36xy+13y^2=4$. 由轨迹的对称性，可知这是一个以所给两直线所成的角的角平分线为轴的椭圆.

问题 3　容易得到这个矩形的尺寸是 9×16，由此可知，所拼成的正方形的面积为 144，它的边长为 12，周长为 48.

问题 4　可以归纳得到

$$(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2=[2n(n+1)+1]^2,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

通过展开或利用平方差公式，容易证明该式的正确.

问题 5　记所求的和为 $S_n(n\geqslant2)$，有

$$\begin{aligned}S_n&=6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}6}\\&=(0+6)+(60+6)+(660+6)\\&\quad+\cdots+(\underbrace{666\cdots6}_{n-1\text{个}6}0+6)\\&=10(6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots6}_{n-1\text{个}6})+6n\\&=10S_{n-1}+6n\\&=10(S_n-\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}6})+6n.\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}9S_n&=\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}6}0-6n\\&=\frac{2}{3}(\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}9}0-9n),\end{aligned}$$

即 $S_n=\frac{2}{3}(\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}1}0-n)$.

因为

$$\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}1}0=10+10^2+\cdots+10^n=\frac{10(10^n-1)}{9},$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]\\&=\frac{2}{27}(10^{n+1}-10-9n),\quad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

问题 6　解法一：不妨假设 $x>y>z\geqslant1$，记 N 为测试的项数，由题意知 $N>1$，且有

$$(x+y+z)N=20+10+9=39.$$

因 $x+y+z\geqslant3+2+1=6$，知 $N\leqslant6$. 又因 N 整除 39，所以 $N=3$，$x+y+z=13(x,y,z\geqslant1)$. 于是两两相异的整数 x,y,z 可能为：

$$\begin{aligned}(x,y,z)=&(10,2,1),(9,3,1),(8,4,1),\\&(8,3,2),(7,5,1),(7,4,2),\\&(6,5,2),(6,4,3).\end{aligned}$$

基于艾丽斯的总分为 20，以上情况中只有(8,4,1)是可能的，删去其他情况. 因此贝蒂的代数测试成绩为 8,4,1 中的最大值 8. 于是问题就转化为填下列表格，使得每一行都为 8,4,1 这三个成绩，三列的总和分别为

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

20,10,9.

	艾丽斯	贝蒂	卡罗尔
代数		8	
几何			
其他学科			
	20	10	9

容易找到问题的唯一解：

	艾丽斯	贝蒂	卡罗尔
代数	4	8	1
几何	8	1	4
其他学科	8	1	4
	20	10	9

因此卡罗尔在几何测试中位列第二.

解法二：如解法一所述，我们可以得到共有三项测试，且 $x+y+z=13(x>y>z\geqslant 1)$. 因为 20 不能被 3 整除，所以艾丽斯的各项成绩不完全一样. 若艾丽斯的最高成绩为 y，那么她的各项成绩一定为 $\{y,z,z\}$ 或 $\{y,y,z\}$. 但

$$y+z+z<y+y+z<x+y+z=13<20,$$

因此艾丽斯至少有一项成绩为 x.

我们可以证明艾丽斯不可能恰好只有一项的成绩为 x. 如果是，那么由于 $x+y+z=13$，艾丽斯的总成绩为 20，她的各项成绩一定为 $\{x,y,y\}$. 于是有 $x+2y=20$，$y=z+7$，所以 $x+2z=6$. 因此贝蒂的成绩不可能为 $\{x,z,z\}$，也不可能为 $\{x,y,z\}$ 或更好，但这已包含了所有可能的结果，矛盾. 所以艾丽斯一定有两项成绩为 x. 因为 $x+y+z=13$，贝蒂有一项的成绩为 x，且总成绩为 10，所以贝蒂的各项成绩一定为 $\{x,z,z\}$，他们三人的成绩分布一定为：

	代数	*	*
艾丽斯	?	x	x
贝蒂	x	z	z
卡罗尔	?	y	y

因此卡罗尔的成绩中除代数外均为 y，毫无疑问在几何测试中列第二位的是卡罗尔.

【评论】 事实上，可以得到艾丽斯的代数成绩为 y，并且 $x=8,y=4,z=1$，以至于最后的结果确实是合理的.

假若题目的条件减弱为仅仅要求 x,y,z 是非负的，那么项数 N 就可能为 13，此时可能有 $x=2,y=1,z=0$ 或其他许多可能结果. 因此为了最后解决问题，就必须补充进一步的条件.

问题 7 我们注意到

$$f_0(x)=\frac{1}{1-x},$$

$$f_1(x)=f_0(f_0(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x},$$

$$f_2(x)=f_0(f_1(x))=\frac{1}{1-\frac{1-x}{-x}}=x,$$

$$f_3(x)=f_0(f_2(x))=\frac{1}{1-x}=f_0(x).$$

因此一般地有

$$f_{n+3}(x)=f_n(x),\quad n=0,1,2,3,\cdots,$$

特别地有

$$f_{1976}(1976)=f_2(1976)=1976.$$

问题 8 以 3 为模，各数的余数可能为 0、1 或 2. 若五个整数中有三个被 3 除后的余数相等，那么它们的和能被 3 整除. 而若没有三个整数被 3 除后的余数相等，那么五个余数中一定包含 0、1 和 2，此时相应的三个数的和能被 3 整除.

【说明】 下列一般的结论出现在1981年联邦德国奥数竞赛(见 Crux Mathematicorum 12 (1986)：43).

记 n 为2的正整数幂，证明对于任意含 $2n-1$ 个正整数的集合中，一定存在含 n 个正整数的子集，使得这 n 个正整数的和能被 n 整除.

更一般地，任意含 $2n-1$ 个整数的集合 S 中，一定存在含 n 个整数的子集，使得这 n 个整数的和能被 n 整除. 这一结论归功于埃尔德什(Erdös)、金斯伯格(Ginsburg)和齐夫(Ziv)(堆垒数论中的定理，*Bull. Res. Council Israel* 10(1961)). 该结论的进一步证明分别由格雷厄姆(R. Graham)(*Mathematical Intelligencer* 1(1979)：250)以及雷德蒙(T. Redmond)与里亚米卡(C. Ryavec)(*ibid* 2 (1980)：106)给出.

问题9 解法一：在史密斯先生较平时提早20分钟回到家里的那次行程中，他的司机在来回行程中分别节省了10分钟，因此他遇见史密斯并接他上车时应该是下午的4点50分.(这里我们假设史密斯和司机行走或开车行驶都保持匀速.)这样可以得出司机的行驶速度是史密斯行走速度的5倍.

现假设在第二次行程中，史密斯在下午4点半后 t 分钟遇见他的司机. 这样司机从相遇处到车站就节省了 $\frac{t}{5}$ 分钟的行程. 通常他是5点钟到达车站，因此有 $t+\frac{t}{5}=30$，解得 $t=25$，而史密斯第二次比平时提早了10分钟回到家里.

解法二：(借助如图57的时空线)我们画出史密斯和他的司机的距离-时间图.

司机的时空线是 $A-D-E$，其中 A 和 E 未知，但 $\angle DAE=\angle DEA$. 史密斯在下午4点到达目的车站以后的时空线是 $I-B-G$，其中 $BG/\!/DE$. 于是 $\overline{GE}=20$ 分钟. 史密斯在下午4点半到达目的车站以后的时空线是 $H-C-F$，其中 $HC/\!/IB$，$CF/\!/DE$. 于是可知 $\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{GF}=\overline{FE}$，因此 $\overline{FE}=10$ 分钟. 即史密斯第二次比平时提早了10分钟回到家里.

问题10 记点 P 为整个系统的重心位置，只要点 P 在水表面的上方，当水表面上升时，点 P 的位置就会下降，因此在某一时刻点 P 的位置就正好位于水的表面. 这时点 P 的位置即处于最低的极端位置，因为一旦再注入更多的水，就会同时抬高水的表面与点 P 的位置.

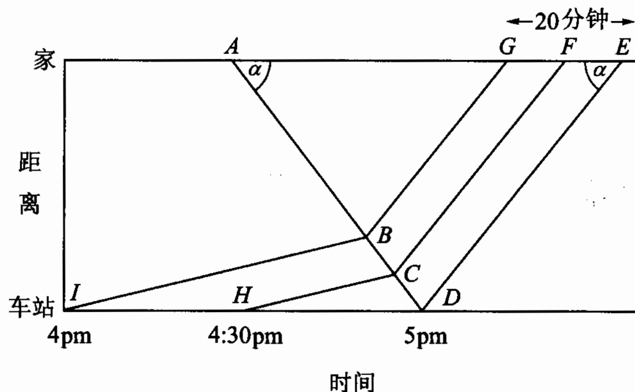


图57

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 11 建议他第一盘就进行比赛. 我们可以证明父亲选择第一盘就进行比赛比坐等第一盘结束再进行比赛有更大可能性取得整个比赛的胜利.

以 F、M 和 S 分别表示父亲、母亲和儿子,又记 $X>Y$ 表示 X 赢得对 Y 的比赛.

若 F 和 M 首先进行比赛,那么在下列三种情况下 F 取得整个比赛的胜利:

(1) $F>M, F>S$;

(2) $F>M, S>F, M>S, F>M$;

(3) $M>F, S>M, F>S, F>M$.

若 F 和 S 首先进行比赛,那么和上面一样,在三种情况下 F 取得整个比赛的胜利,只需将上述三种情况中的 M 与 S 交换即可.

若 M 和 S 首先进行比赛,那么只在下列两种情况下 F 取得整个比赛的胜利:

(4) $S>M, F>S, F>M$;

(5) $M>S, F>M, F>S$.

记$\overline{AB}$为 $A>B$ 的概率,有$\overline{AB}+\overline{BA}=1$.

若 F 和 M 首先进行比赛,那么 F 取得整个比赛胜利的概率 P_{FM} 为

$$P_{FM}=\overline{FM}\cdot\overline{FS}+\overline{FM}\cdot\overline{SF}\cdot\overline{MS}\cdot\overline{FM}+\overline{MF}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{FS}\cdot\overline{FM}.$$

若 F 和 S 首先进行比赛,那么 F 取得整个比赛胜利的概率 P_{FS} 为

$$P_{FS}=\overline{FS}\cdot\overline{FM}+\overline{FS}\cdot\overline{MF}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{FS}+\overline{SF}\cdot\overline{MS}\cdot\overline{FM}\cdot\overline{FS}.$$

若 M 和 S 首先进行比赛,那么 F 取得整个比赛胜利的概率 P_{MS} 为

$$\begin{aligned}P_{MS}&=\overline{SM}\cdot\overline{FS}\cdot\overline{FM}+\overline{MS}\cdot\overline{FM}\cdot\overline{FS}\\&=(\overline{SM}+\overline{MS})(\overline{FS}\cdot\overline{FM})\\&=\overline{FS}\cdot\overline{FM}.\end{aligned}$$

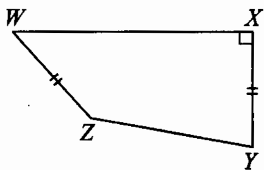
显然 $P_{FM}>P_{MS}$, $P_{FS}>P_{MS}$.

【评论】 凭直觉可知,F 最好在第一盘比赛中首先面对 M 和 S 中的弱者.

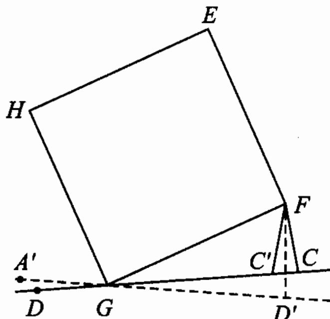
问题 12 解法一:这个方法依据下面简单的引理:

如图 58(a),已知 $WXYZ$ 为四边形,$\overline{WZ}=\overline{XY}$,$\angle WXY=\frac{\pi}{2}$,那么$\angle XYZ\leqslant\frac{\pi}{2}$,其中等号当且仅当 $WXYZ$ 为矩形时成立.

原问题证明如下. 绕点 H 旋转$\triangle DGH$,使点 G 与点 E 重合. $\left(\text{此时点 } D \text{ 旋转到点 } D', \angle AHD'=\frac{\pi}{2}.\right)$由引理可知,四边形 $AHD'E$ 中,$\angle A\leqslant\frac{\pi}{2}$. 同理可得相应的 $\angle B\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\angle C\leqslant\frac{\pi}{2}$和$\angle D\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由于$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2\pi$,所以一定有$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\frac{\pi}{2}$. 再应用引理的第二部分,可知$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}$,从而得 $ABCD$



(a)



(b)

图 58

是一个正方形.

解法二:如图 58(b),将整个图形绕正方形的中心逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$,使点 H 落在点 G 处,点 G 落在点 F 处,这时点 A、点 D 分别落在点 A'、点 D'处.

因为 $\angle FGC+\angle GFD'=\angle FGC+\angle HGD=\frac{\pi}{2}$,所以 FD'垂直于 GC. 又因为 $\overline{FD'}=\overline{GD}=\overline{FC}$,所以点 D'或者在 GC 上,或者与点 F 位于 GC 的两侧,因此点 A'与点 F 必定位于 GC 的同一侧,从而 $\angle EHA=\angle HGA'$,且大小不会超过$\angle HGD$. 这一结论同样适用于这个正方形的四周,于是有

$\angle EHA\leqslant\angle HGD\leqslant\angle GFC\leqslant\angle FEB\leqslant\angle EHA$,

可得这些角都相等. 因此

$$\angle HGD+\angle DHG=\angle EHA+\angle DHG=\frac{\pi}{2},$$

从而$\angle D=\frac{\pi}{2}$. 同理可得$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\frac{\pi}{2}$,四边形 $ABCD$ 为矩形. 其余结论可方便推得.

【评论】 关于等边三角形的类似问题可见 *Math. Mag.* 43 (1970): 280－282;关于一般的 n 边形问题可见 *ibid* 44 (1971): 296.

问题 13 若将正整数 1,2,3,…,126 分成 6 个集合,那么根据鸽笼原理,必定有一个集合,至少包含已选定的 7 个正整数中的两个. 因此原问题可以转化为经过适当划分,使这 6 个集合中的每一集合的最大数至多是最小数的两倍.

显然下列划分可以实现预期的目的:

$$\{1,2\},\{3,4,5,6\},\{7,8,\cdots,13,14\},$$
$$\{15,16,\cdots,29,30\},\{31,32,\cdots,61,62\},$$
$$\{63,64,\cdots,125,126\}.$$

【思考】 找到不大于 127 的某 7 个正整数,其中任意两数都不满足不等式 $1<\frac{y}{x}\leqslant 2$.

问题 14 如图 59,将这一正方形划分成四个边长均为$\frac{1}{2}$的小正方形. 根据鸽笼原理,必定有一个小正方形至少包含其中的两点,它们之间的距离不会大于边长为$\frac{1}{2}$的小正方形的对角线长,即$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

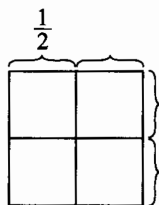


图 59

问题 15 假设共有 N 个政治团体,他们所作的承诺分别记为集合 $S_1,S_2,\cdots,S_N$. 可知没有两个集合是相等的(因为没有两个政治团体的承诺完全一样). 而且当 $i\neq j$ 时,$S_i\cap S_j\neq\varnothing$(因为每两个政治团体之间至少有一个承诺相同),因此 S_i 与 S_j 必定不互补.

所以在 $S_1,S_2,\cdots,S_N$ 中,至多有所有承诺集合的$\frac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}$个子集,即 $N\leqslant 2^{n-1}$.

记 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 n 个承诺,$A_i(i=1,2,\cdots,2^{n-1})$是$\{p_2,p_3,\cdots,p_n\}$的子集. 那么 2^{n-1}个集合$\{p_1\}\cup A_i$ 显示一定有 2^{n-1}个政治团体.

问题 16 我们将已经删去一个红色方格和两个黑色方格的$(2m+1)\times(2n+1)$的棋盘称为"已删棋盘".

首先,对 $m=n=1$ 的棋盘,我们容易一一列举加以说明. 基于对称性,实际上只需考虑以下 6 种情况,而图 60 中已经给出了具体覆盖方法.

下面归纳证明. 现有一个$(2m+1)\times(2n+1)$的已删棋盘 C,并假设包含于 C 内的

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

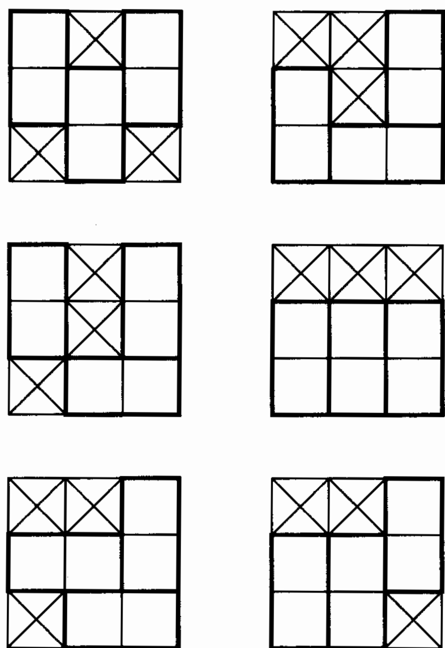


图 60

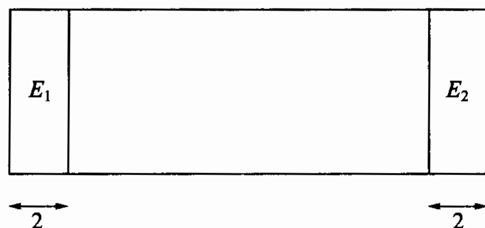


图 61

任一较小的$(2k+1)\times(2l+1)$的已删棋盘均可以被多米诺骨牌所覆盖. 因为C的两维尺寸中至少有一维的长度不小于5(3×3的情况已经被证明),所以C一定含有两个互相不重叠的、处于相对位置的、宽度为2的边沿(见图61).

显然,我们可以选定一个至多包含一个C内已删方格的边沿,不妨记为E_1,并分别研究以下两种情况:

情况1　E_1不包含C内已删方格.

这时$C-E_1$包含所有3个已删方格. 由归纳假设,$C-E_1$可以为多米诺骨牌所覆盖. 而E_1本身显然可以为多米诺骨牌所覆盖,所以整个已删棋盘C可以为多米诺骨牌所覆盖.

情况2　E_1恰好包含1个C内已删方格.

这时我们可以在$C-E_1$内找到与E_1内已删方格具有相同颜色的相关方格,如图62所示.

现删去$C-E_1$内这一相关方格. 由归纳假设,$C-E_1$可以为多米诺骨牌所覆盖. 结合图63所示的操作,可知对已删棋盘C而言,在删去原来的3个方格后,由上面所作的覆盖,整个图形即可被多米诺骨牌所覆盖.

以上步骤,仅在$C-E_1$内的相关方格原已删去的情况下不能实现. 若这一方格是红色,则这种情况不可能出现. 而若这一方格是黑色,我们可以从E_2内有一红色已删方格的情况进行推断,如前一样证明最后结论.

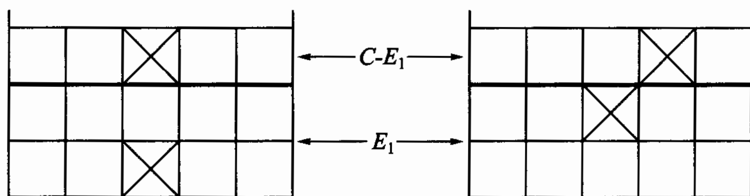


图 62

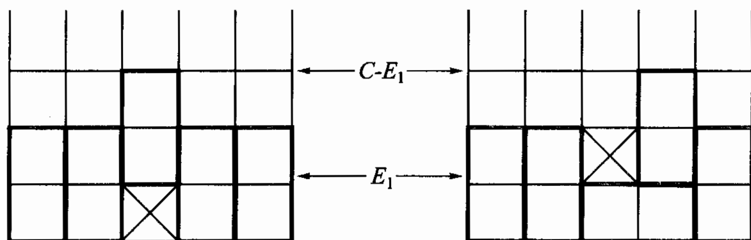


图 63

问题 17 我们可以给出更为一般的结果：对任意正整数 m 与 n，有 $D(9m+n)=D(n)$.

若

$$9m+n=a_S10^S+a_{S-1}10^{S-1}+\cdots+a_110+a_0,$$

则

$$9m+n-[a_S(10^S-1)+a_{S-1}(10^{S-1}-1)+\cdots+a_1(10-1)]=a_0+a_1+\cdots+a_S.$$

因为括号内的数能被 9 整除，所以存在数 $m_1<m$，使

$$a_0+a_1+\cdots+a_S=9m_1+n.$$

重复以上过程，可得到一系列整数：

$$m>m_1>m_2>\cdots>m_k=0,$$

使得

$$D(9m+n)=D(9m_1+n)=D(9m_2+n)=\cdots=D(9m_k+n)=D(n).$$

当 $m=(137)n$ 时，有 $9m+n=9(137)n+n=(1234)n$，所以

$$D((1234)n)=D(n).$$

问题 18 解法一：为了解如何解决这一问题，我们作一个以点 A 为中心的正方形，点 B、C 分别在其相邻的两边（或延长线）上，如图 64(a)所示．以点 A 为中心逆时针方向旋转 $90°$，使点 B 旋转到过点 C 的那条边上的点 B' 处．由此可知，要解决这一问题，只需找出点 B 绕点 A 逆时针方向旋转 $90°$后的位置点 B'，则直线 $B'C$ 必定含正方形的一条边，剩下的就容易解决了（见图 64(b)），即确定点 B'的位置，使得 $B'A$ 与 BA 相等且互相垂直．由 $B'C$ 含正方形的一条边，可容易地构造所需的正方形.

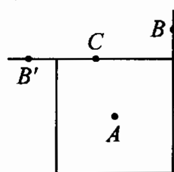
另一个正方形可以通过将点 B 绕点 A 顺时针方向旋转 $90°$到点 B''的方法而得到，直线 $B''C$ 同样含正方形的一条边，符合所需的条件.

有几种特殊情况：

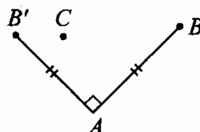
若点 A 恰为线段 BC 的中点，显然存在一个所需的正方形（以 BC 为对角线）；

若$\angle BAC$ 是直角，且$\overline{AC}=\overline{AB}$，这时存在无数多个满足条件的正方形；

若$\angle BAC$ 是直角，且$\overline{AC}\neq\overline{AB}$，则无法解决这一问题.



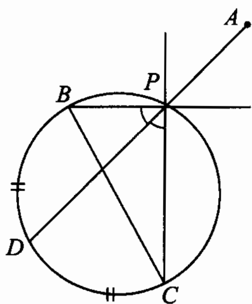
(a)



(b)

图 64

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com



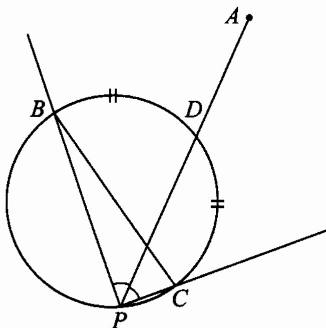


图 65

解法二：依据圆中直径所对的圆周角是直角，以及同圆中等弧所对的圆周角相等这些事实，可以首先构造所需正方形的一个顶点及它的对角线.

如图 65，以 BC 为直径作圆，记 D 为圆弧 BC 的中点（存在两种可能性）. 直线 AD 与圆交于另一点 P，那么 PA 就是所需正方形的对角线的一部分，而 BP 与 CP 为由此产生的正方形的两相邻边的一部分.

因为 $\angle BPC=\frac{\pi}{2}$，$\widehat{BD}=\widehat{CD}$，$\angle BPD=\angle CPD=\frac{\pi}{4}$，该构造显然易证. 至于特殊情况可作如下描述. 若 A 是 BC 的中点，那么点 P、D 分别是两段 BC 弧的中点，$BPCD$ 是唯一满足条件的正方形；若 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，且 $\overline{AC}\neq\overline{AB}$，那么点 A 位于圆上，正方形退化成了一个点（因为点 A 既是顶点又是中心），然而若 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，且 $\overline{AC}=\overline{AB}$，此时取 D 为与 A 相对的另一点，则产生退化情况；取 D 为点 A，则点 P 就可以取任一与 A 相对的 BC 弧上的点，便可得到无数多个满足条件的正方形.

问题 19 所证不等式等价于：

（两边平方） $n^{\sqrt{n+1}}>(n+1)^{\sqrt{n}}$，

或

（两边取$\sqrt{n}$次幂） $n^{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}>(n+1)^n$，

或

（两边同除以 n^n） $n^{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}-n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

或

$$n^{\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

现有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{n^n},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots<3.$$

因此，我们需要满足的是

$$n>3^{2+\frac{1}{2^n}}>3^{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)},$$

显然当 $n\geqslant 10$ 时后者成立.

最后可以证明 $n=7$ 是一切可能的 n 值中的最小值.

【评论】 运用微积分（非初等方法），容易证明当 $x>e^2=7.389\cdots$ 时，$(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 或等价的 $\frac{\ln^2 x}{x}$ 是单调递减的. 类似的微积分解答出自米特里诺维奇（D. S. Mitrinović）的《基本不等式》一书（P. Nordhoff, Groningen, 1964,

p.60).

问题 20 解法一：作 Z、C 关于直线 OXY 的对称点 Z'、C'，如图 66.

因为$\angle DYZ'=\angle Z'ZD=\angle C'XD$，所以 C'、D、X、Y 位于同一个圆上．又$\angle C'XY=\frac{\pi}{2}$，此圆的直径为$\overline{C'Y}=\overline{CY}$，因此$\overline{CY}\geqslant\overline{XD}$，等号当且仅当 D 与 Y 重合时成立$\left(\text{当 } D\neq Y\right.$ 时，$\angle DYX$ 严格小于$\left.\frac{\pi}{2}\right)$.

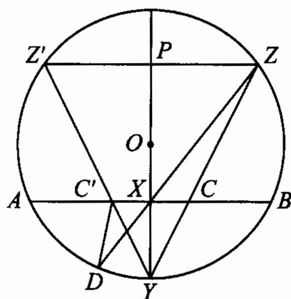


图 66

现在我们进一步证明$\dfrac{\overline{CY}}{\overline{DX}}$是关于$\overline{XC}$的单调递增函数.

记$\overline{OY}=1$，$\overline{OX}=a$，$\overline{XC}=t$，有

$$\overline{CY}^2=(1-a)^2+t^2,$$

$$\overline{AX}^2=1-a^2=\overline{DX}\cdot\overline{ZX},$$

$$\overline{CY}\cdot\overline{CZ}=(\sqrt{1-a^2}+t)(\sqrt{1-a^2}-t)$$
$$=1-a^2-t^2.$$

根据相似三角形性质，当 P 是直线 ZZ' 与 YX 的交点时，有

$$\overline{PZ}=t\left(1+\frac{\overline{CZ}}{\overline{CY}}\right),\quad \overline{PX}=(1-a)\frac{\overline{CZ}}{\overline{CY}},$$

于是

$$\overline{ZX}^2=\overline{PZ}^2+\overline{PX}^2,$$

或

$$\frac{(1-a^2)^2}{\overline{DX}^2}$$
$$=\frac{1}{\overline{CY}^2}\left[t^2\,(\overline{CY}+\overline{CZ})^2+(1-a)^2\,\overline{CZ}^2\right],$$

类似地有

$$\left(\frac{\overline{CY}}{\overline{DX}}\right)^2=\frac{1}{(1-a^2)^2}\{t^2\,\overline{CY}^2+2t^2\,\overline{CY}\cdot\overline{CZ}+[t^2+(1-a)^2]\,\overline{CZ}^2\}$$
$$=\frac{1}{(1-a^2)^2}[t^2(1-a)^2+t^4+2t^2(1-a^2-t^2)+\overline{CY}^2\cdot\overline{CZ}^2]$$
$$=\frac{t^2}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1-a^2)^2}[(1-a^2-t^2)(1-a^2+t^2)+t^4]$$
$$=\frac{t^2}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1-a^2)^2}[(1-a^2)^2-t^4+t^4]=\frac{t^2}{(1+a)^2}+1.$$

由此容易证明$\overline{CY}^2-\overline{XD}^2$ 与$\overline{CY}-\overline{XD}$也都是关于 t 的单调递增函数.

解法二：(马克·克莱曼)如图 67，联结 DY，在 DY 上取点 H，使 XH 垂直于 DY. 因$\angle XDH$ 与$\angle XYZ$ 在圆上截得的弧组成一个半圆，所以

$$\angle XDH=\angle ZDY=\frac{\pi}{2}-\angle XYZ.$$

因此直角三角形 XDH 相似于直角三角形 YCX，从而

$$\frac{\overline{XH}}{\overline{DX}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{CY}}.$$

因为$\overline{XH}\leqslant\overline{XY}$，所以$\overline{DX}\leqslant\overline{CY}$.

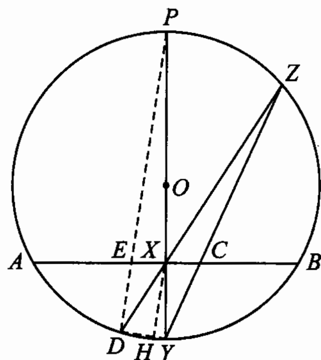


图 67

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 21 考虑如下 n 个和式：

$$S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3, \cdots, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

记 S_i 被 n 除所得的余数为 r_i，即

$$S_i=q_in+r_i,\ 0\leqslant r_i\leqslant n-1,\ i=1,2,\cdots,n.$$

若存在某个 i，有 $r_i=0$，那么 S_i 即满足所需性质.

若当 $j=1,2,\cdots,n$ 时，均有 $r_j\neq 0$，那么这 n 个正整数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 可取的值属于由 $n-1$ 个正整数所组成的集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$. 由鸽笼原理可知，至少有两个余数相等，不妨设 $r_l=r_m(m>l)$. 此时

$$a_{l+1}+\cdots+a_m=S_m-S_l=(q_m-q_l)n,$$

满足要求.

问题 22 考虑任取的三点 A、B、C，由题设，不妨假设 AB 是三角形 ABC 中最长的边，那么 A 与 B 不可能被联结.

问题 23 解法一：记 $m=\frac{p}{q}$，其中 p、q 均为正整数，且互素.

那么

$$m+\frac{1}{m}=\frac{p^2+q^2}{pq}.$$

由此可知，若此式的值为整数，p 与 q 必定都能整除 p^2+q^2，从而 p 整除 q^2，q 整除 p^2. 由于 p、q 互素，只能得到

$$p=q=1,\quad m=1.$$

解法二：只要证明："使方程 $x+\frac{1}{x}=k$ 有正有理数根的正整数 k 只能是 2"就足够了.

这一方程，即

$$x^2-kx+1=0,$$

有根

$$\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2},\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

这些根为有理数，则 k^2-4 必定是完全平方数. 但是 $k\geqslant 3$ 时，

$$(k-1)^2<k^2-4<k^2,$$

所以当 $k\geqslant 3$ 时，k^2-4 不可能是完全平方数. 而当 $k=1$ 时，k^2-4 为负，也不可能是完全平方数. 因此唯一可能的值是 $k=2$.

问题 24 如图 68，因为 $\angle APC$ 与 $\angle ABC$ 都是直角，所以以 AC 为直径的圆一定过点 B 与 P. 又因为 AP 与 CP 是这个圆上相等的两条弦，所以它们相对的两个圆周角相等，即 $\angle ABP=\angle CBP$.

【评论】 注意这个解答与问题 18 的解法二有一定的相似之处.

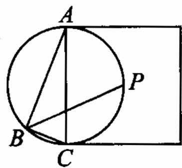


图 68

问题 25 记 a 为 l_1 与 l_3 的距离，b 为 l_2 与 l_4 的距离，显然由一点到这四条直线的距离之和至少为 $a+b$.

设 k 为一正数，L 为到这四条直线的距离之和等于 k 的动点轨迹.

情形 1：$k<a+b$，则 L 为空集.

情形 2：$k=a+b$，则 L 为如图 69 所示的平行四边形 $ABCD$ 及它的内部.

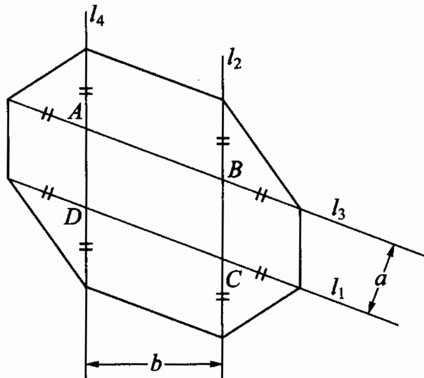


图 69

情形 3:$k>a+b$,则 L 为如图 69 所示的中心对称的八边形.

这一结论可以看作是如下命题的直接结果:

若 P 是等腰三角形 $ABC(AB=AC=a)$ 底边 BC 上的任一点,那么点 P 到两腰 AB、AC 的距离之和为一常数.

如图 70 所示,若这两个距离分别为 d_1 与 d_2,那么△ABC 的面积为

$$\frac{1}{2}ad_1+\frac{1}{2}ad_2=\frac{1}{2}a(d_1+d_2).$$

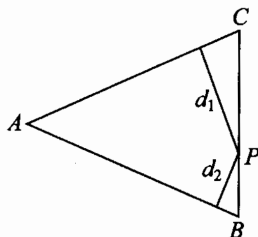


图 70

【评论】 有可能四条直线都相互平行,此时若记 c 为位于里面的两条平行线的距离与位于外面的两条平行线的距离之和,则

$k<c$ 时,L 为空集;

$k=c$ 时,L 为里面两条平行线及两线之间的区域;

$k>c$ 时,L 为与已知直线平行的两条平行线,分别在里面两条平行线所成区域的两侧.

问题 26 选择其中两点,如 A 与 B,使剩下的三点(记为 P_1、P_2、P_3)在直线 AB 的同一侧(想想看如何实现). 此时 $\angle AP_1B$、$\angle AP_2B$、$\angle AP_3B$ 的大小都不一样. 因为若其中有两者相等,如 $\angle AP_1B$ 与 $\angle AP_2B$ 相等,那么 A、B、P_1、P_2 就共圆了.

不失一般性,假设

$$\angle AP_1B<\angle AP_2B<\angle AP_3B.$$

这时过 A、B 与 P_2 的圆一定使得 P_3 位于圆的内部,P_1 位于圆的外部.(这一问题可以推广到三维.)

【说明】 参见 R. Honsberger, *Mathematical Morsels*, MAA, Problem 23, p. 48.

问题 27 分别记△ABC 的三边 BC、CA 与 AB 的长度为 a、b 与 c(见图 71),那么

$$\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}bh_2=\frac{1}{2}ch_3$$
$$=\frac{1}{2}d_1a+\frac{1}{2}d_2b+\frac{1}{2}d_3c.$$

由于这四个表达式的值都等于△ABC 的面积 S,因此

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}$$
$$=\frac{ad_1}{ah_1}+\frac{bd_2}{bh_2}+\frac{cd_3}{ch_3}$$
$$=\frac{ad_1}{2S}+\frac{bd_2}{2S}+\frac{cd_3}{2S}$$
$$=\frac{ad_1+bd_2+cd_3}{2S}=\frac{2S}{2S}=1.$$

【说明】 问题的推广可参见 M. Klamkin, *Crux Mathematicorum* 13 (1987): 274.

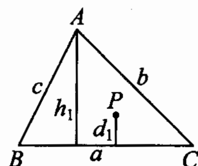


图 71

问题 28 可以肯定会面地点一定在首末两个房间之间. 因为若选择位于尽头的某一房间外面的任一点,那么它到各个房间的距离之和一定超过位于尽头的那个房间到各个房间的距离之和.

注意到,位于首末两个房间之间的任一点到这两个房间的距离之和为一常数,因此我们可以不考虑这两个房间,以作进一步研究,使会面地点到剩下各房间的距离之和为最小.

重复以上研究过程,我们可以推断:会面地点应该在第 2 个与倒数第 2 个房间之间,

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

应该在第3个与倒数第3个房间之间，如此等等.

因此，若 n 为偶数，男孩们应该选择正中间两个房间之间的任一点会面；而若 n 为奇数，则应该选择正中间的那个房间会面.

以“分析法”进行描述的过程如下：

以各房间所在直线为坐标轴，分别记各房间的坐标为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

记会面地点 P 的坐标为 x，那么点 P 与各房间的距离之和为

$$D(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|.$$

若 n 为偶数，设 $n=2m$，则

$$D = \sum_{i=1}^{m}(|x-a_i| + |a_{2m+1-i}-x|).$$

由三角不等式，有

$$D \geqslant \sum_{i=1}^{m} |x-a_i+a_{2m+1-i}-x|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(a_{2m+1-i}-a_i)$$

$$= a_{m+1}+\cdots+a_{2m}-(a_1+\cdots+a_m),$$

等号仅当 $a_m \leqslant x \leqslant a_{m+1}$ 时成立.

若 n 为奇数，设 $n=2m+1$，则

$$D = \sum_{i=1}^{m}(|x-a_i| + |a_{2m+2-i}-x|) + |x-a_{m+1}|$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m}|x-a_i+a_{2m+2-i}-x| + |x-a_{m+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}|a_{2m+2-i}-a_i| + |x-a_{m+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(a_{2m+2-i}-a_i) + |x-a_{m+1}|$$

$$\geqslant a_{m+2}+\cdots+a_{2m+1}-(a_1+\cdots+a_m),$$

等号仅当 $x=a_{m+1}$ 时成立.

若对 $0 \leqslant x < a_n$，画出 $D(x)$ 的图象，我们可以得到图72所示的两个无界的凸多边形之一，从而找到满足要求的会面地点.

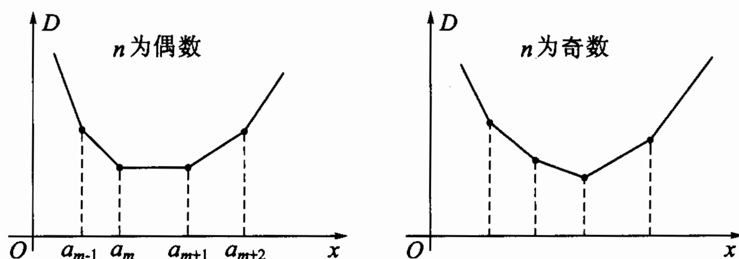


图72

库默尔(E. Kummer)，德国代数学家，但他的算术却非常差劲。每当他要在课堂上做很简单的算术时，他就叫他的学生来帮忙。有一次他要计算。“7×9，”他开口说道，“7×9是呃——啊——啊——7×9是……”“61，”一名学生提示道。库默尔在黑板上写下61。“老师，”另一名学生说，“应该是69。”“喂！喂！先生们，”库默尔说，“不可能两个都对——要么是61，要么是69。”

问题 29 观察所需要的结果(如图 73),注意到点 Q_1 可以看成是点 Q_2 以 P 为中心旋转 180°而得到的. 因此点 Q_1 既在圆 O_1 上,也在圆 O_2 以 P 为中心旋转 180°所得到的图象上,这个图象与圆 O_2 大小相同,且与圆 O_2 相切于 P 点.

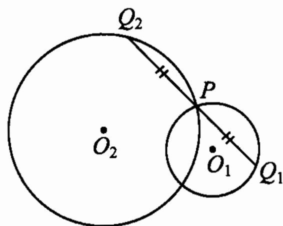


图 73

【说明】 更一般的问题是:过点 P 作一直线,使其被两圆所截出的两条线段的比值为一常数.

这一系列相关的构造问题,可参见 I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, New Math. Library 8, Mathematical Association of America, pp. 21—40.

问题 30 如图 74,将图形绕点 B 逆时针旋转 60°,则点 P 落于点 C 处,点 A 落于点 R 处,可得 $\overline{PA}=\overline{CR}$,类似地,有 $\overline{CR}=\overline{BQ}$.

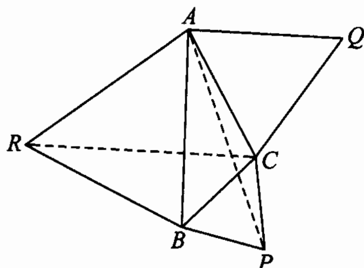


图 74

【说明】 这一图形的其他有趣的性质,可参见 R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, NY, 1960, pp. 218—222.

问题 31 将和式的每一项表达成分母为 2, 3,…,n 的最小公倍数的分数,此时所有的分子除一项外都是偶数,而这一项的原分母是 2 的不超过 n 的最高次幂. 因此整个和式的分子是奇数,而公分母是偶数.

【评论】 可以证明当 a、$d>0$ 时,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\cdots+\frac{1}{a+(n-1)d}$$

(一个等差数列的前 n 项倒数的和)不可能为一整数. 证明的依据为贝特朗假设:m 与 $2m$ 之间必然存在素数.

问题 32 记 A、B 为这段弧的两个端点,过球心 O 作一平面 π,且使其为$\angle AOB$ 的角平分线的法平面,见图 75.

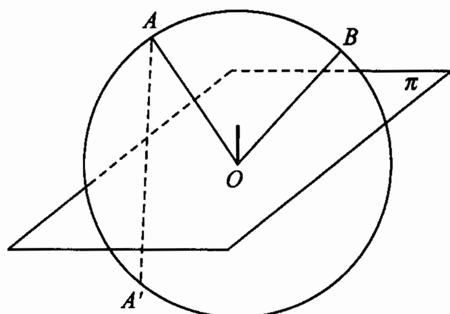


图 75

我们可以证明弧$\overset{\frown}{AB}$一定位于由平面 π 所产生的包含 A、B 的半球面上.

作点 A 关于平面 π 的对称点 A',因为 A'、O 与 B 共线,所以 $\overline{A'B}=2$. 又注意到若 X 为 π 上的任一点,那么 $\overline{AX}=\overline{A'X}$. 对任意的长度小于 2 的弧$\overset{\frown}{AB}$,不可能包含属于 π 的任一点,因为若$\overset{\frown}{AB}$包含 X,则

$$\overset{\frown}{AX}+\overset{\frown}{XB}\geqslant\overline{AX}+\overline{XB}=\overline{A'X}+\overline{XB},$$

由三角不等式,有

$$\overline{A'X}+\overline{XB}\geqslant\overline{A'B}.$$

类似地,我们可以证明更一般的结论,即若一个最小中心直径长度为 2 的中心对称物体的两个边界点被一段长度小于 2 的圆弧所联结,那么这段圆弧一定位于过该对称中心

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

的平面所产生的半个物体之上.

问题 33 解法一:记 $n=6m+r,0\leqslant r\leqslant 5$. 分别计算 $\left[\frac{n}{3}\right]$、$\left[\frac{n+2}{6}\right]$、$\left[\frac{n+4}{6}\right]$、$\left[\frac{n}{2}\right]$与$\left[\frac{n+3}{6}\right]$,如表 1 所示.

容易验证在这个表格的数据中,每一行的前三项的和等于后两项的和.

解法二:对任意正整数 r 和整数 $k(k=0,1,\cdots,r-1)$,$\left[\frac{n+k}{r}\right]$是不超过 $n+k$ 的 r 之正整数倍数的个数. 因此,它同时又是不超过 n 的与 $r-k$ 关于模 r 同余的正整数的个数.

因此,$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]$是不超过 n 的关于模 6 余 0,2,3,4 的正整数的个数,而$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]$则是不超过 n 的偶数以及关于模 6 余 3 的正整数的个数.

【译者注】 $\left[\frac{n}{3}\right]$是不超过 n 的与 3 关于模 3 同余的正整数的个数,即 3 的倍数的个数,这些正整数为 3,6,9,….

$\left[\frac{n+2}{6}\right]$是不超过 n 的与 $6-2=4$ 关于模 6 同余的正整数的个数,这些正整数为 4,10,16,….

$\left[\frac{n+4}{6}\right]$是不超过 n 的与 $6-4=2$ 关于模 6 同余的正整数的个数,这些正整数为 2,8,14,….

以上三组正整数之间恰好没有相同元素. 将它们放在一起重新排列,可得到偶数 2,4,6,…,以及关于模 6 余 3 的 3,9,15,….

而$\left[\frac{n}{2}\right]$恰好是不超过 n 的与 2 关于模 2 同余的正整数的个数,即 2 的倍数(偶数)的个数;$\left[\frac{n+3}{6}\right]$是不超过 n 的与 $6-3=3$ 关于模 6 同余的正整数的个数,这些正整数为 3,9,15,…,故两者之间是相等的.

问题 34 最小的 n 位正整数是 10^{n-1},最大的则是 10^n-1. 因此问题所讨论的和就是下列若干项等差数列的和:

$$10^{n-1}+(10^{n-1}+1)+(10^{n-1}+2)+\cdots+(10^n-2)+(10^n-1).$$

项的个数为 $10^n-1-10^{n-1}+1=9\times10^{n-1}$,所以这一和式的值为

表 1

n	$\left[\frac{n}{3}\right]$	$\left[\frac{n+2}{6}\right]$	$\left[\frac{n+4}{6}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n+3}{6}\right]$
$6m$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+1$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+2$	$2m$	m	$m+1$	$3m+1$	m
$6m+3$	$2m+1$	m	$m+1$	$3m+1$	$m+1$
$6m+4$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$
$6m+5$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$

$$\frac{9\times10^{n-1}}{2}(10^{n-1}+10^n-1)$$
$$=45\times10^{n-2}(10^{n-1}\times11-1)$$
$$=495\times10^{2n-3}-(100-55)10^{n-2}$$
$$=(494+1)10^{2n-3}-10^n+55\times10^{n-2}$$
$$=494\times10^{2n-3}+10^{2n-3}-10^n+55\times10^{n-2}$$
$$=494\times10^{2n-3}+\underbrace{99\cdots9}_{n-3\text{个}9}\times10^n+55\times10^{n-2}$$
$$=494\,\underbrace{99\cdots9}_{n-3\text{个}9}55\,\underbrace{00\cdots0}_{n-2\text{个}0}.$$

【思考】 当 $n=2$ 时又如何呢?

问题 35 解法一:如图 76,记 $\overline{BR}=\overline{RP}=\overline{QC}=x$,那么 $\overline{RC}=\overline{PQ}=\overline{AQ}=1-x$.

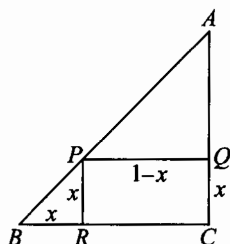


图 76

若 $x\geqslant\frac{2}{3}$,则

$$S_{\triangle BRP}=\frac{1}{2}x^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9};$$

若 $x\leqslant\frac{1}{3}$,则 $1-x\geqslant\frac{2}{3}$,

$$S_{\triangle AQP}=\frac{1}{2}(1-x)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9};$$

若 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$,则 $-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{6}$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{36}$,

$$S_{\text{矩形}PQCR}=x(1-x)$$
$$=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{4}-\frac{1}{36}$$
$$=\frac{2}{9}.$$

解法二:如图 77,画出三条曲线 $y=\frac{x^2}{2}$,$y=x(1-x)$ 与 $y=\frac{1}{2}(1-x)^2$,注意到对任意$0\leqslant x\leqslant1$,三条曲线中 y 的最大值至少是$\frac{2}{9}$.

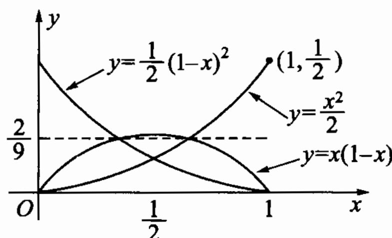


图 77

【评论】 这一问题可以拓展到内接于任意三角形的平行四边形,如图 78 所示.

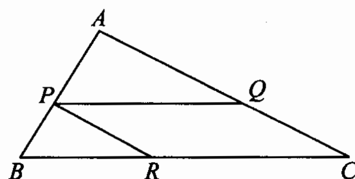


图 78

可以运用前面所得结论的平行投影加以证明.

问题 36 解法一:第一个结果是显而易见的,只要将一对三边长分别为 3、4、5 的直角三角形按如图 79 那样以两种不同的"背对背"方式放置就可以得到.

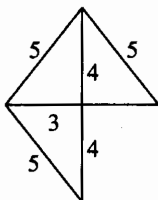


图 79

将同样的想法应用于三边长分别为 5、12、13 的直角三角形,便可得出三边长分别为 10、13、13 的三角形与三边长分别为 24、

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

13、13的三角形面积相等. 事实上,由三边长分别为a、b、c($c^2=a^2+b^2$)的直角三角形可以导出三边长分别为$2a$、c、c的三角形与三边长分别为$2b$、c、c的三角形面积相等.

解法二:将两个等腰三角形的三边长分别记为(u,u,v)与(x,x,y). 依据赫伦引理,两者面积相同的条件为

$$v^2(2u+v)(2u-v)=y^2(2x+y)(2x-y),$$

或

$$4u^2v^2+y^4=4x^2y^2+v^4.$$

在附加条件$u=x$下,可以找到这一方程的一些解,由此$4u^2=4x^2=v^2+y^2$(假设$v^2-y^2\neq0$). 因此$(v,y,2x)$组成一个毕达哥拉斯三元数组. 几个$\{(u,u,v),(x,x,y)\}$的解答是

$\{(5,5,6),(5,5,8)\}$,$\{(13,13,10),(13,13,24)\}$,$\{(25,25,14),(25,25,48)\}$.

【思考】 若$u\neq x$,能找到这一方程的解吗?

问题 37 由图80,首先可以注意到

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$=[x^2+(1-x)^2]+[y^2+(1-y)^2]+[u^2+(1-u)^2]+[v^2+(1-v)^2].$$

考虑到

$$x^2+(1-x)^2=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right],$$

因$0\leqslant x\leqslant1$,容易得到

$$\frac{1}{2}\leqslant x^2+(1-x)^2\leqslant1.$$

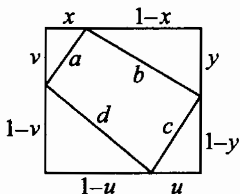


图 80

以y、u、v取代x,可以得到类似的结论.

将这四个不等式相加,便可得到所需要的结果.

我们还可以得到另一个有趣的结果:$2\sqrt{2}\leqslant a+b+c+d\leqslant4$.

【说明】 更一般地,可以证明:若以$m\times n$的矩形取代正方形,则有

$$m^2+n^2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant2(m^2+n^2).$$

问题 38 若我们记x为重叠部分的面积(如图81),那么不重叠部分的面积分别为πR^2-x与πr^2-x,因此两者的差为

$$(\pi R^2-x)-(\pi r^2-x)=\pi(R^2-r^2).$$

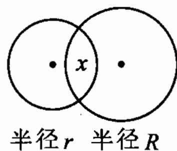


图 81

问题 39 一个有序的和

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=n,a_i\geqslant1,$$

可以用排成一行的n个1被$k-1$个斜杠"/"分隔开的形式来表达,即

$$\underbrace{111\cdots1}_{a_1个1}/\underbrace{11\cdots1}_{a_2个1}/\underbrace{11\cdots1}_{a_3个1}/\cdots/\underbrace{11\cdots1}_{a_k个1}.$$

为了得到所有这样的表达形式(对所有的$1\leqslant k\leqslant n$),可以将n个1排成一行,在每相邻两个1之间所产生的$n-1$个空位中,要么放上一个斜杠,要么不放,这样就可产生2^{n-1}种不同的表达形式.

问题 40 $T_1,T_2,\cdots,T_k$相互之间共赛了$\frac{1}{2}k(k-1)$场,而与$T_{k+1},T_{k+2},\cdots,T_n$之间共赛了$k(n-k)$场.

当所有与后者的比赛都被$T_1,T_2,\cdots,T_k$所赢得时,$S_1+S_2+\cdots+S_k$达到最大,从而

$$S_1+S_2+\cdots+S_k\leqslant\frac{1}{2}k(k-1)+k(n-k)$$
$$=nk-\frac{1}{2}k(k+1).$$

问题 41 猜想一般的规律为

$$
\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\\
&=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6},\ n=1,2,3,\cdots.
\end{aligned}
$$

本题容易归纳证明，请读者自行完成.

我们还可以利用平方和公式作如下证明：

$$
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},\quad k=1,2,3,\cdots.
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\\
&=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6},
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
&2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2\\
&=2^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\
&=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

作两者之差，便得

$$
\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\\
&=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

问题 42 (1) 解方程 $x=\frac{x^2+1}{198}$，即 $x^2-198x+1=0$，得到两根为

$$
\alpha=99+\sqrt{99^2-1}=99+70\sqrt{2},
$$

$$
\beta=99-\sqrt{99^2-1}=99-70\sqrt{2}.
$$

又有

$$
\alpha+\beta=198,\ \alpha\beta=1.
$$

因此

$$
\alpha=\frac{\alpha^2+1}{198}>\frac{1}{198},\ \beta=\frac{\beta^2+1}{198}>\frac{1}{198},
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha&=198-\beta<198-\frac{1}{198}\\
&=197.99494949\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta&=198-\alpha<198-\frac{1}{198}\\
&=197.99494949\cdots.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1)得

$$
\sqrt{2}=\frac{\alpha-99}{70}<\frac{197.99\dot{4}\dot{9}-99}{70}=1.41\dot{4}2135\dot{6}.
$$

(3) $(1.41421356)^2=1.9999999932\cdots<2$,

所以

$$
\sqrt{2}>1.41421356.
$$

问题 43 将这个等边三角形划分成 4 个边长为 1 的小等边三角形(见图 82). 由鸽笼原理，4 个小等边三角形中至少有 1 个包含 5 个针点中的 2 个以上的点，它们之间的距离不大于 1.

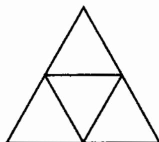


图 82

问题 44 存在这样的直线.

作直线 l，使其与所给点确定的任一条直线(有限多条)都不平行，且使所有点位于直线 l 的同一侧(见图 83).

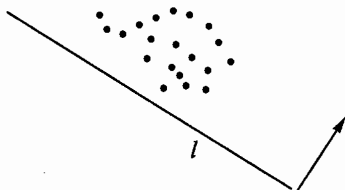


图 83

将直线 l 沿着如图所示的与其垂直的方向平行移动，它将每次只经过一个所给的点. 当直线移动到经过一半的点时停下，即得到满足要求的直线.

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 45 解法一：因为$\angle BPA$与$\angle AQB$分别是两圆上的圆周角，且所对的弧始终为AB弧，所以两个角的值都为常数，从而它们的正弦也是常数. 对$\triangle BPQ$运用正弦定理，有

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}=\frac{\sin Q}{\sin P}=\text{常数}.$$

解法二：观察点P与点A重合的极端情况或许可以得到启发，此时PQ与圆PAB相切. 如图84，记C为圆BAQ上的点，且AC与圆PAB相切，那么$\angle APB=\angle CAB$，$\angle AQB=\angle ACB$，因此$\triangle BPQ$相似于$\triangle BAC$，有

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}，\text{为一常数}.$$

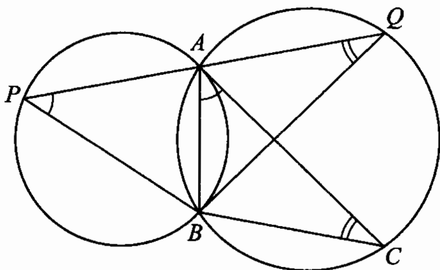


图 84

问题 46 (1) 若n为偶数，

$$f(n)=0+1+2+3+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$
$$=\frac{n^2}{4}.$$

若n为奇数，

$$f(n)=0+1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}+1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{n^2-1}{4}.$$

因此

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}，n\text{为偶数}，\\ \dfrac{n^2-1}{4}，n\text{为奇数}.\end{cases}$$

(2) 注意到$s+t$与$s-t$的差为偶数$2t$，因此$s+t$与$s-t$两者或全偶或全奇.

在两者全偶情形下，

$$f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2}{4}-\frac{(s-t)^2}{4}=st;$$

在两者全奇情形下，

$$f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2-1}{4}-\frac{(s-t)^2-1}{4}=st.$$

问题 47 如图85，分别过P、Q、R作QR、RP、QP的平行线，得到的$\triangle ABC$即满足所需性质.

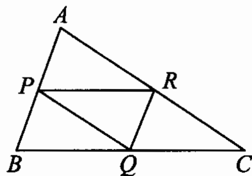


图 85

问题 48 通常，若n为一正奇数，那么$a+b$必定是a^n+b^n的一个因式. 因此5整除$1^{99}+4^{99}$，也整除$2^{99}+3^{99}$.

问题 49 解法一：每一个整数都可表达为$4n$，$4n+1$，$4n+2$，$4n+3$中的某一种形式，因此它们的平方被8除的余数为0，1或4. 而$8c+6$被8除的余数为6，所以a^2+b^2不可能等于$8c+6$.

解法二：因为

$$a^2+b^2=2(4c+3)$$

为一偶数，所以a与b具有相同的奇偶性，即或全偶，或全奇.

在全偶情形下，设$a=2m$，$b=2n$，有

$$a^2+b^2=4m^2+4n^2=2(4c+3),$$

即

$$2(m^2+n^2)=4c+3.$$

由于等号左边为偶数，右边为奇数，这一等式不可能成立.

在全奇情形下，设 $a=2m+1, b=2n+1$，有

$$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=2(4c+3),$$

即

$$m(m+1)+n(n+1)=2c+1.$$

同样等号左边为偶数，右边为奇数，等式不可能成立.

问题 50 记 A、B 为各由其中 4 个数所成的集合.

1 与 2 不能属于同一个集合，否则它们的和就不能在另一个集合中找到；1 与 3 也是如此. 因此可以假设 $1\in A, 2\in B, 3\in B$. 那么 4 必定属于 A，以使 $2+3$ 的和在 A 中可以找到. 所以 $\{1,4\}\subset A, \{2,3\}\subset B$.

类似的理由可说明 5、8 属于同一个集合，而 6、7 属于另一个集合. 由此得出可能的分拆是：

(i) $\{1,4,5,8\}, \{2,3,6,7\}$;

(ii) $\{1,4,6,7\}, \{2,3,5,8\}$.

但第一种分拆不能得到完全相同的各个和，第二种则可以. 因此第二种分拆是唯一的结果.

【思考】 解决类似的对前 16 个正整数进行分拆的问题.

【评论】 在第二种分拆中，一个集合中的所有数字的和及其各自平方的和恰好等于另一个集合中相应的和. 这一结论可以推广到前 2^n 个正整数.

问题 51 由已知，$x>0, y>0, x-2y>0$，且 $2\ln(x-2y)=\ln x+\ln y$. 所以

$$\ln(x-2y)^2=\ln xy,$$

$$(x-2y)^2=xy,$$

$$\left(\frac{x}{y}-2\right)^2=\frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0,$$

$$\left(\frac{x}{y}-4\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)=0,$$

$$x=4y \text{ 或 } x=y.$$

后一种情形是不可能出现的，因为那时 $x-2y<0$. 因此，$\frac{x}{y}=4$.

问题 52 解法一：首先注意到 $2=f(2)=f(1\times2)=f(1)f(2)=f(1)\times2$，因此 $f(1)=1$. 此外，有

$$f(2^2)=f(2\times2)=f(2)f(2)=2\times2=2^2,$$

$$f(2^3)=f(2\times2^2)=f(2)f(2^2)=2\times2^2=2^3,$$

等等.

于是，$f(2^k)=2^k, k=0,1,2,\cdots$. 现在来考虑 2 的两个相邻次幂之间的整数：

$$2^k<2^k+1<2^k+2<\cdots<2^k+2^k-1$$
$$=2^{k+1}-1<2^{k+1}.$$

它们的 f 值满足

$$2^k<f(2^k+1)<f(2^k+2)$$
$$<\cdots<f(2^{k+1}-1)<2^{k+1}.$$

于是，在 2^k 与 2^{k+1} 之间我们有 2^k-1 个不同的整数 $f(2^k+j), j=1,2,\cdots,2^k-1$. 因为在 2^k 与 2^{k+1} 之间恰好有 $2^{k+1}-2^k-1=2^k-1$ 个整数，从而有

$$f(2^k+j)=2^k+j,\ j=1,2,\cdots.$$

解法二：如解法一，我们注意到 $f(2^k)=2^k$，$k=0,1,2,\cdots$. 由性质(e)，我们发现 $f(m+1)>f(m)$，即 $f(m+1)\geqslant f(m)+1$. 因此 $f(m)\geqslant m$，且 $f(m+k)\geqslant f(m)+k$.

剩下的工作就是要证明：不存在 n，使得 $f(n)>n$. 假设对某个 n，有 $f(n)>n$. 那么 $2^n>n$ 且

$$2^n=f(2^n)=f(n+2^n-n)$$
$$\geqslant f(n)+2^n-n$$
$$>n+2^n-n=2^n,$$

这是荒谬的.

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

解法三(数学归纳法):首先注意到 $f(1)=1$. 现假设对 $k=1,2,\cdots,n$, $f(k)=k$. 我们要证明 $f(n+1)=n+1$. 如果 $n+1=2j$,那么 $1\leqslant j\leqslant n$,且

$$f(n+1)=f(2j)=2j=n+1.$$

如果 $n+1=2j+1$,那么 $1\leqslant j<n$,且

$$\begin{aligned}2j&=f(2j)<f(2j+1)<f(2j+2)\\&=f(2(j+1))=2f(j+1)=2(j+1)\\&=2j+2.\end{aligned}$$

于是,

$$2j<f(2j+1)<2j+2,$$

所以 $f(2j+1)=2j+1=n+1$.

问题 53 设 BC、BD、BE 是平面 π 上的三个长度相同的线段,它们分别与平面 π 上的三条给定直线平行. 设 A 是空间中的点,使得 AB 平行于 l(见图 86). 从而有 $\triangle ABC\cong\triangle ABD\cong\triangle ABE$,因此 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$. 于是 A 和 B 在 CD 的垂直平分面上,也在 DE 的垂直平分面上,因此 AB 垂直于平面 π.

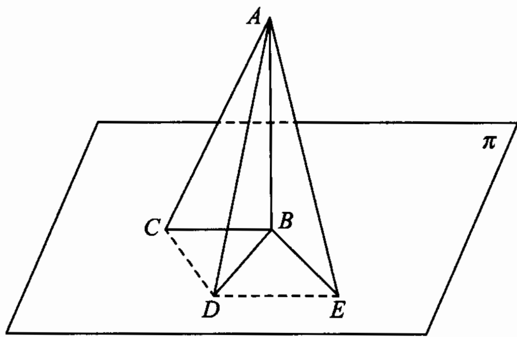


图 86

或者,由

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EB},$$

得

$$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=0,$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CE}=0.$$

因此,$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CD}$ 且 $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CE}$,从而有 $\overrightarrow{BA}\perp\pi$.

【译者注】 本题中三条给定的直线两两不平行,否则结论不成立.

问题 54 我们有

$$\begin{aligned}a&=\underbrace{11\cdots1}_{m个1}\\&=1+10+10^2+\cdots+10^{m-1}\\&=\frac{10^m-1}{9},\\b&=\underbrace{100\cdots05}_{m-1个0}=5+10^m,\\ab+1&=\left(\frac{10^m-1}{9}\right)(5+10^m)+1\\&=\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2\\&=\left(\frac{10^m-10+12}{3}\right)^2\\&=\left[\frac{10(10^{m-1}-1)}{3}+4\right]^2\\&=(\underbrace{33\cdots34}_{m-1个3})^2,\end{aligned}$$

故 $\sqrt{ab+1}=\underbrace{33\cdots34}_{m-1个3}$.

问题 55 解法一:建立坐标系,使得高为 h 的旗杆位于 $(-a,0)$,高为 k 的旗杆位于 $(a,0)$. 则具有相同仰角的点 (x,y) 满足

$$\frac{h}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\frac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

或

$$h^2(x^2-2ax+a^2+y^2)=k^2(x^2+2ax+a^2+y^2),$$

或

$$x^2(k^2-h^2)+2ax(k^2+h^2)+y^2(k^2-h^2)+a^2(k^2-h^2)=0.$$

如果 $k=h$,则该方程化为 $x=0$,于是轨迹就是 y 轴.

如果 $k\neq h$,不妨设 $k>h$,则

$$x^2+2ax\left(\frac{k^2+h^2}{k^2-h^2}\right)+y^2+a^2=0,$$

该轨迹是一个圆,以 x 轴上的两个明显具有相同仰角的点的连线为直径.

解法二:设 A 和 B 分别是这两根旗杆的脚点

(见图 87). 所求轨迹上的点 P 满足$\angle APA'=\angle BPB'$,或等价地,$\frac{\overline{PA}}{k}=\frac{\overline{PB}}{h}$,即

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{k}{h}\quad(常数).$$

在平面 APB 内,$\triangle APB$ 的顶点 P 的内角平分线与外角平分线分别与直线 AB 交于点 C 和点 D(见图 88),且有

$$\frac{k}{h}=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}},$$

故$\angle DPC=90°$.

点 C 和点 D 可以如图 89 那样来确定(在两旗杆所确定的平面上),可以看出 P 的轨迹是("水平"面上的)一个圆,它以 CD 为直径. 这种类型的圆被称为阿波罗尼斯圆.

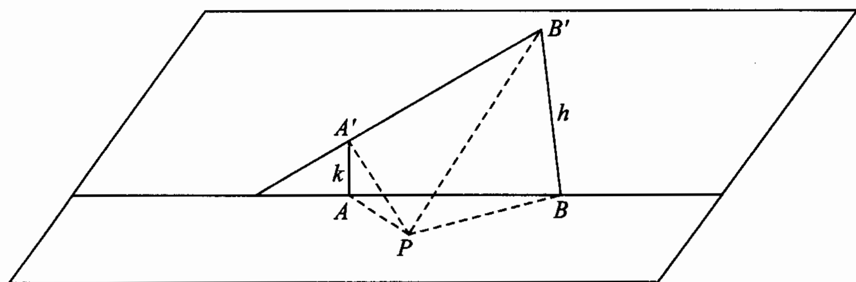


图 87

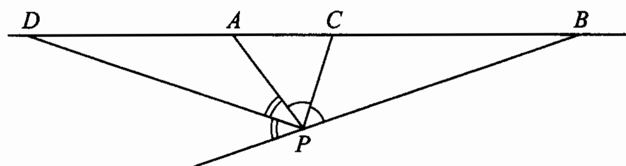
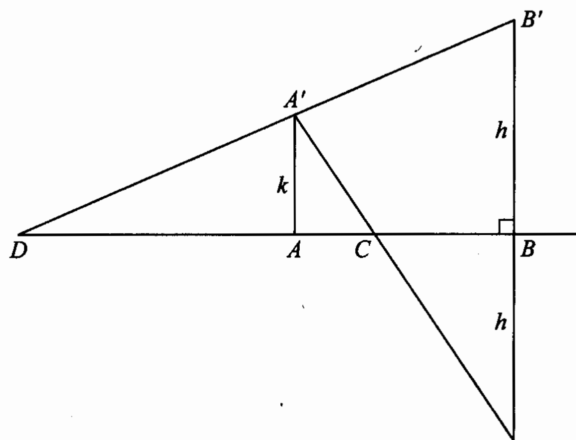


图 88



$\frac{\overline{AC}}{k}=\frac{\overline{BC}}{h}$ 且 $\frac{\overline{AD}}{k}=\frac{\overline{BD}}{h}$

图 89

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 56 对于 $k=3,4,\cdots$,

$$k!=2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot k>2^{k-1},$$

故
$$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}},\ k=3,4,\cdots.$$

因此,对 $n\geqslant 1$,有

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

问题 57 如图90,因为 AX 平行于 BP,所以 $\triangle AXP$ 与 $\triangle AXB$ 有相同的面积. 同理,$\triangle DXP$ 与 $\triangle DXC$ 也有相同的面积. 因此,

$$\begin{aligned}S_{\triangle APD}&=S_{\triangle AXD}+S_{\triangle DXP}+S_{\triangle AXP}\\&=S_{\triangle AXD}+S_{\triangle DXC}+S_{\triangle AXB}\\&=S_{ABCD}.\end{aligned}$$

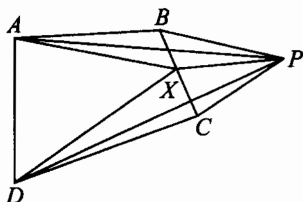


图 90

问题 58 对于 $k=1,2,3,\cdots$,我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\\&=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}}<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

对于 $k=1,2,\cdots,n-1$,将左边的不等式相加;对于 $k=1,2,\cdots,n$,将右边的不等式相加,便得所需的不等式.

【习题】 用类似方法求

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

的上下界.

问题 59 该四边形的顶点将该圆的圆周划分成四段弧,其长度之和是 2π,因此最短的一段弧的长度最多为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. 相对应的(联结这一最短弧两个端点的)线段长 $\leqslant\sqrt{2}$.

问题 60 任何凸多边形的外角之和总是 360°. 所给的多边形有4个直角,因此4个外角和是 360°. 因此不可能有多余的顶点存在了!

> 有一位猴王,用尾巴倒挂在树上,
> 它一边晃荡一边对着猴儿猴女们讲:
> "我的孩子们啊,再过几百万年时光,
> 你们的后代当中会有人飞黄腾达,
> 他可能是一位教授,站在耶鲁大学的课堂上。"
> H. E. Salzer, *Scripta Mathematica* 21(1956)

【说明】 更一般地，如果一个凸多边形有 n 个角等于$\frac{360^\circ}{n}$，那么该多边形是正 n 边形.

问题 61 设两个红球 R_1 和 R_2 分别重 r_1 与 r_2，对其他颜色的球我们也用类似的记号. 首先，将 R_1 和 W_1（白球）与 R_2 和 B_1（蓝球）称一次. 如果 $r_1+w_1=r_2+b_1$，那么或者 $r_1<r_2$ 且 $w_1>b_1$，或者 $r_1>r_2$ 且 $w_1<b_1$. 这两种情况可以再通过称 W_1 与 W_2 来区别.

如果 $r_1+w_1>r_2+b_1$，那么一定有 $r_1>r_2$，并且会出现以下可能的情况之一：

(i) $w_1>w_2$ 且 $b_1>b_2$；

(ii) $w_1>w_2$ 且 $b_1<b_2$；

(iii) $w_1<w_2$ 且 $b_1<b_2$.

在第二次称重时，可以对 R_1 和 B_1 与 W_2 和 B_2 进行比较.

如果 $r_1+b_1>w_2+b_2$，那么 $b_1>b_2$ 且 $w_1>w_2$；

如果 $r_1+b_1=w_2+b_2$，那么 $b_1<b_2$ 且 $w_1>w_2$；

如果 $r_1+b_1<w_2+b_2$，那么 $b_1<b_2$ 且 $w_1<w_2$.

最后一种情况 $r_1+w_1<r_2+b_1$ 也可以用类似的方法来处理.

问题 62 设两地距离为 D，飞机引擎的速度为 V，风速为 W，$W<V$. 则在静止气流中飞行所花的时间是$\frac{2D}{V}$，而在风中飞行则要花更多的时间：

$$\frac{D}{V-W}+\frac{D}{V+W}=\frac{2DV}{V^2-W^2}$$
$$=\frac{2D}{V}\cdot\frac{V^2}{V^2-W^2}>\frac{2D}{V}.$$

这一结果与直觉是一致的，飞机顶风飞行所多花的时间比它乘风飞行所节省的时间更多.

【说明】 更一般的结论，参阅 *Crux Mathematicorum* 12 (1986)：277—279.

问题 63 解法一：设 P 是 AB 的中点，则（因为$\angle AOB$ 是直角）$\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$. 因为$\angle POC$ 是直角，所以$\overline{PC}>\overline{PO}$，因此$\overline{PC}>\overline{PA}=\overline{PB}$. 于是，$\angle ACB$ 不可能是直角. 类似地，可得$\angle ABC$ 和$\angle BAC$ 也不是直角.

【思考】 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形吗？

解法二：设直线 OA、OB、OC 分别是笛卡儿坐标系中的 x 轴、y 轴、z 轴. 设 A、B、C 的坐标分别为 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$ 和 $(0,0,c)$，且不失一般性，假设$\angle CAB$ 是直角. 那么

$$\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2,$$
$$b^2+c^2=a^2+b^2+a^2+c^2,$$
$$2a^2=0,$$

故 $a=0$，矛盾！

问题 64 要解的方程组为

$$\begin{cases}x+yz=2,\\ y+zx=2,\\ z+xy=2.\end{cases}$$

分别用第一式减去第二式，第二式减去第三式，得

$$(x-y)(1-z)=0,\quad (y-z)(1-x)=0.$$

推导出以下四种情况：

$$x-y=0=y-z,\quad x-y=0=1-x,$$
$$1-z=0=y-z,\quad 1-z=0=1-x.$$

从而得 $x=y=z=1$ 或 $x=y=z=-2$.

问题 65 将该正方形分割成形状相同的 4 个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形. 由鸽笼原理，其中一个小正方形中至少包含 3 个给定的点. 由它们确定的三角形的面积最多是这个小正方形面积的一半，即$\frac{1}{8}$.

问题 66 由

$$0=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

可得 $a-b=b-c=c-a=0$.

【说明】 类似地，如果 z_1、z_2、z_3 是复数，且满足

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2,$$

那么在复平面上代表这些复数的点是一个等边三角形的顶点.

问题 67 如图 91，记 $S_\triangle$ 为 $\triangle ABC$ 的面积. 那么

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

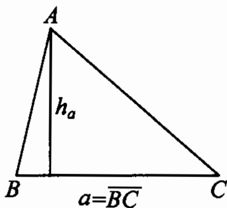


图 91

于是，$a+h_a\geqslant b+h_b$ 等价于

$$a-b\geqslant h_b-h_a=2S_\triangle\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{2S_\triangle(a-b)}{ab},$$

或

$$(a-b)(ab-2S_\triangle)\geqslant 0.$$

因为 $2S_\triangle=ab\sin C\leqslant ab$，所以 $ab-2S_\triangle\geqslant 0$. 再结合 $a-b\geqslant 0$，就得到了我们所要的不等式.

同理可证 $b+h_b\geqslant c+h_c$.

问题 68 设 $n=x10^4+y10^3+z10^2+u10+v$，则 $m=x10^3+y10^2+u10+v$，而

$$10m-n=(u-z)10^2+(v-u)10-v$$

是一个不超过三位的整数. 于是 $\frac{10m-n}{m}$ 是一个整数，它的分子是不超过三位的整数，而分母则是四位数. 因此，$10m-n=0$，即 $u=v=z=0$. 现在我们有 $n=x10^4+y10^3$，且 $m=x10^3+y10^2$，即 n 是形如 $n=10^3N$ 的数，其中 $10\leqslant N\leqslant 99$.

问题 69 如果

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z},$$

那么容易证明 $(x+y)(y+z)(z+x)=0$.

如果 $x+y=0$，那么 $x^{2n+1}=-y^{2n+1}$，于是 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=0$，且两个表达式

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1} \text{ 和 } (x+y+z)^{2n+1}$$

都等于 z^{2n+1}. 当 $y+z=0$ 或 $z+x=0$ 时，有类似的情况. 于是结论成立.

问题 70 解法一：这些点如果存在，它们将是某些圆的中心，这些圆经过这两个给定的点 A 和 B，并且与所给直线 l 相切.

对于可能出现的情况，我们有：

1. 联结两个给定点的直线平行于所给的直线（如图 92）. 此时圆被唯一确定且容易构造.

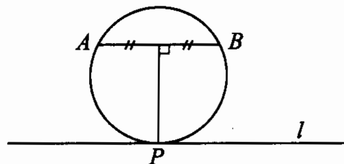


图 92

2. 有一个点，不妨设点 A 在直线上（如图 93）. 此时圆被唯一确定. 如果 BA 垂直于 l，那么 BA 是该圆的直径.

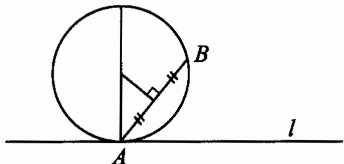


图 93

3. 点 A、点 B 都不在 l 上（且 AB 与 l 不平行，如图 94）. 此时存在两个满足条件的圆. 因为 $\overline{QP}^2=\overline{QA}\cdot\overline{QB}$，所以我们可以构造点 P（有两处，即图中 P 与 P'），而这两个圆的中心也就容易确定了。

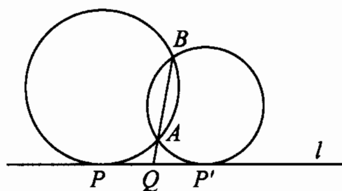


图 94

解法二：与给定两点 A 和 B 等距离的点的轨迹是一条直线 b，即 AB 的垂直平分线．到点 A 与到直线 l 等距离的点的轨迹是一条抛物线 p，它以 A 为焦点，以 l 为准线．b 与 p 的交点就是所要求的点．

如果 A 与 B 位于 l 的两侧，则 b 与 p 将不会相交．（想一想为什么？）在上述情形 1 中，b 平行于 p 的轴，且存在唯一的交点；在情形 3 中，b 与 p 交于两点．

情形 2 是有趣的．如果 A 在 l 上而 B 在 l 外，那么 p 退化成一条过 A 且垂直于 l 的直线，因此与 b 有唯一的交点．然而，我们也可取 A 在 l 外，而 B 在 l 上（见图 95）．此时，如果 R 是 AB 的中点，则 $\angle ROA=\angle ROB$，所以 b 与 p 相切，因此存在唯一的交点 O，满足 $OB\perp l$，且 $\overline{OA}=\overline{OB}$.

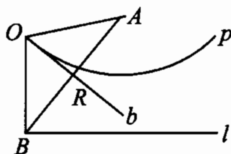


图 95

问题 71 解法一：将 n 用二进制来表示，即

$$n=\varepsilon_0+\varepsilon_1 2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 2^3+\varepsilon_4 2^4+\varepsilon_5 2^5+\varepsilon_6 2^6+\cdots,$$

其中，所有的 ε 都是 0 或 1．容易看出

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2 2+\varepsilon_3 2^2+\varepsilon_4 2^3+\varepsilon_5 2^4+\cdots$$

$$\left[\frac{n+2}{4}\right]=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 2+\varepsilon_4 2^2+\varepsilon_5 2^3+\cdots$$

$$\left[\frac{n+4}{8}\right]=\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4 2+\varepsilon_5 2^2+\cdots$$

$$\left[\frac{n+8}{16}\right]=\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5 2+\cdots$$

$$\vdots$$

将上述等式按列相加，就得到了所要的结果．

解法二：$\left[\frac{n+1}{2}\right]$是 1 到 $n+1$ 之间（包括两头）所有偶数的个数，而它刚好等于 1 到 n 之间（包括两头）所有奇数的个数．

$\left[\frac{n+2}{4}\right]$是 1 到 $n+2$ 之间（包括两头）所有 4 的倍数的个数，而它刚好等于 1 到 n 之间（包括两头）所有不能被 4 除尽的 2 的倍数的个数．

一般地，对每个 k，$\left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right]$是 1 到 $n+2^{k-1}$之间（包括两头）所有 2^k 的倍数的个数，而它刚好等于 1 到 n 之间（包括两头）所有不能被 2^k 除尽的 2^{k-1}的倍数的个数．

因此，对于 1 到 n 之间的每个整数 m，恰好存在一个 k 值，使得 m 可被 2^{k-1}除尽，但不能被 2^k 除尽，而等号的左边正好是把 1 到 n 的每个数数了一遍．

问题 72 解法一：如图 96，设 M 是线段 AB 的中点．分别过 A 和 B 画 MC 的平行线．过点 C 画 MC 的垂线，与过 A 及过 B 的两条平行线分别相交于点 X 和 Y．可得 $\overline{CX}=\overline{CY}$，于是以 C 为圆心、CX 为半径的圆就是所要求的圆．

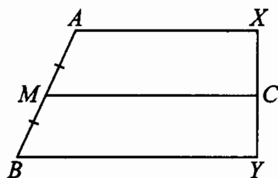


图 96

解法二：此问题与问题 29 有关．如图 97，分别以 AC 和 BC 为直径画圆．如问题 29 那样，构造线段 PCQ，使得

$$\overline{PC}=\overline{CQ}.$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

以 C 为圆心、PQ 为直径的圆就是满足要求的圆. AP 和 BQ 都垂直于直径 PQ，是两条平行的切线.

图 97

【说明】 更困难的问题是：给定三个不共线的点 A、B、C 及一个角 α，构造一个中心为 C 的圆，且过 A 和过 B 的切线以 α 为夹角. 如果 r 是该圆的半径，则可得等式

$$r^4[(b^2-a^2)^2+4k^2a^2b^2]-2r^2k^2a^2b^2(a^2+b^2)+k^4a^4b^4=0,\quad a,b,k \text{ 是常数}.$$

问题 73 显然

$$(x-1)f(x)=x^5-1.$$

因此，

$$\begin{aligned}f(x^5)&=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1\\&=(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+\\&\quad(x^{10}-1)+(x^5-1)+5,\end{aligned}$$

其中每个括号内的项都有因式 x^5-1，因此也就有因式 $f(x)$. 于是

$$f(x^5)=f(x)\text{的倍式}+5.$$

【评论】 用长除法也不难验证该结果，因为商中系数的规律很容易看出.

问题 74 多项式 $f(x)-5$ 有 4 个整数根 a、b、c、d，因此

$$\begin{aligned}&f(x)-5\\=&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x),\end{aligned}$$

其中 $g(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，且 b_1，b_2，$\cdots$，b_m 是整数. 于是，如果 x 是整数，则等式 $f(x)=8$，或

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)=3,$$

意味着 $x-a$，$x-b$，$x-c$，$x-d$ 这 4 个整数中至少有 3 个等于 1 或 -1，于是它们当中必有两个是相等的，这就导致了矛盾.

问题 75 对所有 i 和 j，有

$$a_{ij}\leqslant\max\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\}=M_i,$$

所以

$$\begin{aligned}m_j&=\min\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}\}\\&\leqslant\min\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}=M,\end{aligned}$$

因此，

$$m=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}\leqslant M.$$

问题 76 我们想办法来寻找尽可能长的等比数列. 假设它有 n 项，其公比(必定为有理数)是 $\frac{p}{q}$，其最小项是 a. 公比应该尽可能地小，因而 p 应取 $q+1$. 再加上最后一项 $\frac{ap^{n-1}}{q^{n-1}}$ 是整数，所以 q^{n-1} 整除 a. 于是 a 能被一个整数的较大的幂次整除. 由于 $3^6=729$，因此我们发现一个不少于 7 项的数列必须以 729 或者 $2^6=64$ 的倍数开头. 稍作推敲即可发现最好的取法是以 128 开始，并取 $\frac{3}{2}$ 为公比，此时满足要求的数列有 6 项 $\{128,192,288,432,648,972\}$.

下面是一个更加正式的证明. 公比是 $\frac{3}{2}$ 的等比数列

$$128,192,288,432,648,972$$

说明最多项的数列至少有 6 项. 现在考虑等比数列

$$100\leqslant a<ar<ar^2<\cdots<ar^{n-1}\leqslant1000,$$

这 n 项都是整数，且 $r>1$. 显然，r 一定是有理数. 设 $r=\frac{p}{q}$，且 $p>q\geqslant1$，$(p,q)=1$. 因为 $ar^{n-1}=a\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$ 是整数，所以 q^{n-1} 整除 a. 我们可取 $p=q+1$，则数列

$$100\leqslant a<a\left(\frac{q+1}{q}\right)<\cdots<a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\leqslant1000$$

的长度为 n，其各项在所要求的范围内均为整数(因为 q^{n-1} 整除 a). 如果 $q\geqslant 3$，那么

$$1000\geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\geqslant(q+1)^{n-1}\geqslant 4^{n-1},$$

即 $n\leqslant 5$. 如果 $q=1$，那么

$$1000\geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}=a2^{n-1}\geqslant 100\cdot 2^{n-1},$$

即 $n\leqslant 4$. 如果 $q=2$，那么

$$1000\geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}=a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\geqslant 100\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

即 $n\leqslant 6$. 因此，最长数列的长度是 6.

问题 77 解法一：由公式

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

可知 x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除. 因此 8^n-6^n 能被 2 整除，3^n-1^n 能被 2 整除，于是 $1^n+8^n-3^n-6^n$ 能被 2 整除.

类似地，8^n-3^n 能被 $8-3=5$ 整除，6^n-1^n 能被 $6-1=5$ 整除，因此 $1^n+8^n-3^n-6^n$ 能被 5 整除.

于是，$1^n+8^n-3^n-6^n$ 能被 2 及 5 整除，因此能被 10 整除.

解法二：该数显然是偶数. 又对于 mod 5，有

$$\begin{aligned}&1^n+8^n-3^n-6^n\\=&1^n+(5+3)^n-3^n-(5+1)^n\\\equiv&1^n+3^n-3^n-1^n\equiv 0.\end{aligned}$$

于是，该数既能被 2 又能被 5 整除，因此能被 10 整除.

问题 78 如图 98，每个"圆内"三角形的三边对应圆上的 6 个点. 反之，圆上的每 6 个点也确定了一个这样的三角形. 因此三角形的个数是 $C_n^6=\dfrac{n!}{6!\ (n-6)!}$.

【思考】 将结论推广到球面上的点以及四面体上的点.

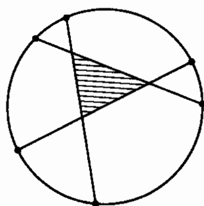


图 98

问题 79 因为

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1&=a_n(a_n-1)=a_na_{n-1}(a_{n-1}-1)\\&=\cdots=a_na_{n-1}\cdots a_1(a_1-1)\\&=a_na_{n-1}\cdots a_1,\end{aligned}$$

于是，结果易得.

问题 80 注意到

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>8\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{2},$$

等等. 因此，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+2\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}>1+3\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{16}>1+4\left(\frac{1}{2}\right),$$

等等. 如取 $N=2^{198}$，则

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{198}}>1+198\left(\frac{1}{2}\right)=100.$$

【说明】 更一般地，请证明：如果 a 和 b 是正数，那么可取到足够大的 N，使得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\cdots+\frac{1}{a+(N-1)d}>100.$$

问题 81 解法一：由算术-几何平均值不等式，有

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right),$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

以及

$$\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right).$$

因为两不等式的左边互为倒数，所以它们两个之间必有一个大于等于 1. 于是结论成立.

解法二：由柯西不等式（参见工具箱 D4），

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)\geqslant n^2.$$

于是，不等式左边两个因子中必有一个 $\geqslant n$. 当且仅当对所有 i 有 $a_i=b_i$ 时，等号成立.

问题 82 如果 $|a_0|\neq1$，结论显然成立. 因为如果 m 是 a_0 的任何倍数，那么 $f(m)$ 一定能被 a_0 整除. 事实上，这无限多个 $f(m)$ 是 a_0 的真倍数，因为 $f(m)$ 只能有限多次取到数值 a_0 与 $-a_0$. 为了寻找 $|a_0|=1$ 时的解，考虑以下步骤. 选择整数 k，使 $f(k)$ 不等于 1 或 -1.（这总是可能的，想一想为什么?）设 p 是 $f(k)$ 的任何素因数，那么 $f(k+rp)\equiv f(k)(\mathrm{mod}\ p)$. 并且，因为一个多项式对于任何一个值只能取到有限多次，所以除了有限多个例外值之外，有无限多个 r 值，使得 $f(k+rp)$ 是 p 的倍数，且不同于 $\pm p$.

问题 83 设 $f(n)$ 是由 n 条直线确定的不同区域的最大个数. 当有一条新的直线 l，即第 $n+1$ 条直线，与前 n 条直线相交，在 l 上产生了 $n+1$ 条线段，每条线段将其所在区域一分为二，从而新增了 $n+1$ 个区域，即 $f(n+1)=f(n)+n+1,n\geqslant1$. 重复使用这一等式，并注意到 $f(1)=2$，可得

$$\begin{aligned}&f(n+1)\\&=n+1+f(n)\\&=(n+1)+n+f(n-1)\\&=(n+1)+n+(n-1)+f(n-2)\\&\quad\vdots\\&=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+f(1)\\&=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1+1\\&=\frac{(n+2)(n+1)}{2}+1.\end{aligned}$$

等价地有

$$f(n)=\frac{(n+1)n}{2}+1,\quad n=1,2,\cdots.$$

【思考】 请考虑空间中用 n 个平面将空间分割为立体区域的情形.

问题 84 解法一：如果用 $f(m,n)$ 来表示从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的道路数（见图 99），则

$$\begin{aligned}&f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1),\\&\qquad m\geqslant1,n\geqslant1,\\&f(m,0)=f(0,n)=1.\qquad(*)\end{aligned}$$

利用这一递归式，我们能对较小的 m、n 值，算出 $f(m,n)$ 的值，这些值都标在图 99 中. 例如联结 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 的对角线上的数字是：$1=C_1^1,1=C_1^0$. 联结 $(2,0)$ 和 $(0,2)$ 的对角线上的数字是 $1=C_2^2,2=C_2^1,1=C_2^0$. 下一条对角线上的数字是 $1=C_3^3,3=C_3^2,3=C_3^1,1=C_3^0$. 这使人联想到 $f(m,n)=C_{m+n}^n$，容易验证 C_{m+n}^n 确实满足公式（$*$）.

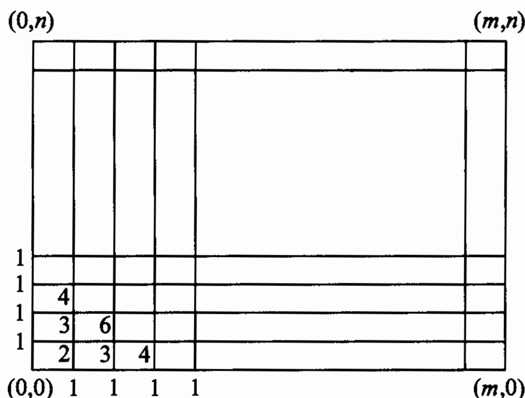


图 99

解法二：从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的路线可以刻画成由 m 个符号 R 及 n 个符号 U 组成的一个直线段序列——R 对应于“向右”走一步，U 对应于“向上”走一步. 例如：图 100 中的路线对应于序列 RRUUUURRURRU.

RRUUUURRURRU

图 100

由 m 个 R、n 个 U 组成的序列个数为 C_{m+n}^{n}.

问题 85 用第一个等式减去第二个等式，得

$$y-x=\frac{a^2-b^2}{p}\text{，其中 } p=x+y+z.$$

因此

$$2(x^2+xy+y^2)-(y-x)^2$$
$$=2c^2-\frac{(a^2-b^2)^2}{p^2}.$$

类似地，

$$2(y^2+yz+z^2)-(z-y)^2$$
$$=2a^2-\frac{(b^2-c^2)^2}{p^2},$$
$$2(z^2+zx+x^2)-(x-z)^2$$
$$=2b^2-\frac{(c^2-a^2)^2}{p^2}.$$

将后三个等式相加，并化简，得

$$2p^2=2(a^2+b^2+c^2)-\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{p^2}.$$

这个关于 p^2 的二次方程的解为

$$p^2=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\pm[6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-3(a^4+b^4+c^4)]^{\frac{1}{2}}\}. \quad (*)$$

在三边长分别为 a、b、c 的 $\triangle ABC$ 中，设 P 是其内部的任意一点，x、y、z 分别是点 P 到三顶点的距离（见图 101）. 容易看出，但不易证明，如果 $\triangle ABC$ 的所有内角都小于 $120°$，那么使得 $x+y+z$ 取得最小值的点 P 存在，且满足

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°.$$

图 101

此时等式(a)、(b)、(c)显然成立，它们就是三角形的余弦定理，且(*)式可简化为

$$p=\left(\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S_{\triangle}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $S_{\triangle}$ 是 $\triangle ABC$ 的面积.

【说明】 参见问题 30 的说明和解答.

问题 86 设 $V_1, V_2, \cdots, V_6$ 是这 6 个点. 在与 V_1 相连的 5 条边中，至少有 3 条的颜色相同，不妨设 V_1 与 V_2、V_3、V_4 用红色边相连. 如果 $\triangle V_2V_3V_4$ 的三条边都是蓝色的，则我们已经得到所需结果. 如果 $\triangle V_2V_3V_4$ 中有一条（或多条）边是红色的，不妨设 V_2V_3 是红色的，那么 $\triangle V_1V_2V_3$ 的三条边都是红色的.

【评论】 事实上，至少存在两个三角形，它们的边是同色的！还可以证明如果空间中有 16 个点，且任意三点不共线，用线段将它们两两相连，得到 120 条边，对这些边用 3 种颜色着色，则一定存在一个单色的三角形.

问题 87 重复利用恒等式

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$$

会产生无限多种表示方法，诸如：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

等等. 可以从任意一个将 1 表示为有限多个整数的倒数和的表达式出发,利用上述恒等式,来得到不同的倒数表示.

问题 88 可以用圆规直尺把圆分割为任意正整数块面积相等的区域. 为了简便起见,我们来陈述 $n=4$ 时的方法. 将直径分割成相等的 4 部分,并如图 102 那样画半圆即可.

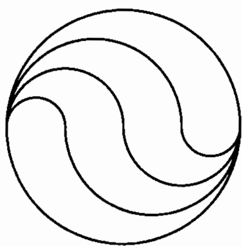


图 102

问题 89 假设由点列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 所确定的路线是自相交的(见图 103),我们证明必存在一条更短的线路. 假设对某个 i 和 j, $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, 线段 P_iP_{i+1}、P_jP_{j+1} 在点 O 处相交,那么

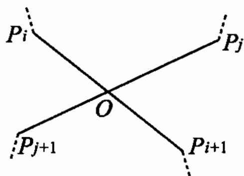


图 103

$$\overline{P_iP_j}+\overline{P_{i+1}P_{j+1}}$$
$$<\overline{P_iO}+\overline{OP_j}+\overline{P_{i+1}O}+\overline{OP_{j+1}}$$
$$=\overline{P_iP_{i+1}}+\overline{P_jP_{j+1}},$$

所以路线

$$P_1P_2\cdots P_iP_jP_{j-1}\cdots P_{i+2}P_{i+1}P_{j+1}P_{j+2}\cdots P_n$$

要比路线

$$P_1P_2\cdots P_iP_{i+1}\cdots P_jP_{j+1}\cdots P_n$$

更短.

问题 90 我们有 $P(x,y)\equiv(x-y)Q(x,y)$, 以及 $P(x,y)\equiv P(y,x)=(y-x)Q(y,x)$.

因此,

$$0=P(x,y)-P(y,x)$$
$$\equiv(x-y)[Q(x,y)+Q(y,x)],$$

即

$$Q(x,y)+Q(y,x)\equiv 0,$$

因此,$Q(x,x)\equiv 0$. 于是 $x=y$ 是多项式方程 $Q(x,y)=0$ 的一个解. 所以 $x-y$ 是$Q(x,y)$ 的因式.

【说明】 对这一结论的扩展请参见 *Crux Mathematicorum* 14 (1988): 139, #4.

问题 91 因为$\triangle_8$ 和$\triangle_0$ 没被用于标号,所以$\triangle P_0P_8P_7$ 必须标号$\triangle_7$, $\triangle P_0P_7P_6$ 必须标号$\triangle_6$, $\triangle P_0P_3P_6$ 必须标号$\triangle_3$, $\triangle P_0P_1P_3$ 必须标号 $\triangle_1$, $\triangle P_1P_2P_3$ 必须标号 $\triangle_2$, $\triangle P_3P_4P_6$ 必须标号$\triangle_4$, $\triangle P_4P_5P_6$ 必须标号$\triangle_5$. 这是满足所给条件的唯一标号法,见图 104.

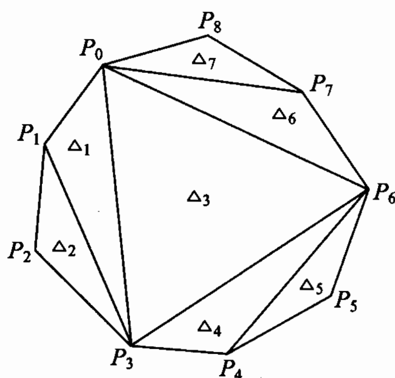


图 104

【思考】 试将上述方法推广到将 n 边形分割为 $n-2$ 个三角形的情形.

问题 92 如图 105,因为 OT 垂直于 TS,所

以直线 PR、OT、QS 相互平行. 因此

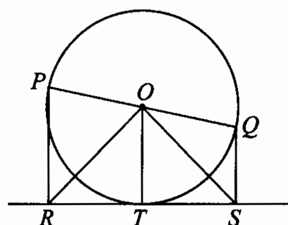


图 105

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}}=\frac{\overline{PO}}{\overline{OQ}}=1,\text{或}\overline{RT}=\overline{TS}.$$

于是，在 $\triangle ROT$ 和 $\triangle SOT$ 中，OT 是公共边，$\overline{RT}=\overline{ST}$，$\angle RTO=\angle STO$（两者都是直角），所以这两个三角形全等，故 $\overline{OR}=\overline{OS}$.

问题 93 解法一：用数学归纳法证明.

对于 $n=1$，该结论成立. 假设当 $n=k$ 时结论成立，那么

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$$
$$\geqslant\frac{2^k}{k+1}(1+a_1+\cdots+a_k)(1+a_{k+1}).$$

我们现在来证明

$$\frac{2^k}{k+1}(1+s)(1+a)\geqslant\frac{2^{k+1}}{k+2}(1+s+a),$$

其中 $a=a_{k+1}$，$s=a_1+\cdots+a_k$. 将上式化简，并重新组合，得

$$2(as-k)+k(a-1)(s-1)\geqslant 0,$$

因为对所有 i，$a_i\geqslant 1$，所以不等式对 $n=k+1$ 成立. 于是由数学归纳法，结论对所有 n 都成立. 仅当所有 $a_i=1$ 时等号成立.

解法二：所给的不等式等价于

$$\left(\frac{1+a_1}{2}\right)\left(\frac{1+a_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{1+a_n}{2}\right)$$
$$\geqslant\frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n+1},$$

或者，记 $x_i=\dfrac{a_i-1}{2}\geqslant 0$，得

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$
$$\geqslant 1+\frac{2}{n+1}(x_1+\cdots+x_n);$$

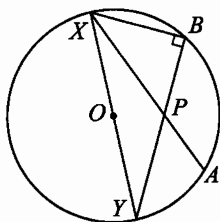
而

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$
$$\geqslant 1+x_1+\cdots+x_n$$
$$\geqslant 1+\frac{2}{n+1}(x_1+\cdots+x_n),$$

故命题得证.

问题 94 如图 106，显然 $\angle XBY$ 是直角，$\angle AXB$ 是常数，因此 $\angle APB$ 是常数. 故轨迹是一个过 A 和 B 的圆.

【译者注】 上图中的 $\angle APB$ 与下图中的 $\angle APB$ 互补，故这些 P 点在同一个圆上.



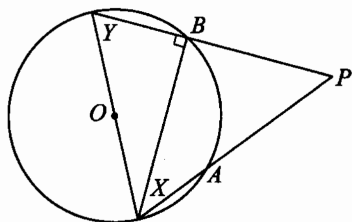


图 106

问题 95 给出的例子使人想到的一般规律是

能上学校我当然心花怒放，
我想这样的事情真是意义非常；
我知道了那么多东西，
却不知道它们是什么名堂。
S. O. Barkerd

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

这一等式很容易验证. 将这一等式转化为等价形式

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

对于 $1\leqslant i<j$,由计算得

$$\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)+\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$$
$$=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}.$$

于是我们必须解方程

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}.$$

将它与下式比较:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}$$

(它就是第一个等式,只是将 n 用 $n-1$ 进行了替换,)我们有解

$$i=n-1,\ j+1=(n-1)n.$$

问题 96 更一般地,假设约翰抛了 $n+1$ 枚硬币,玛丽抛了 n 枚硬币. 那么或者约翰抛出的正面次数比玛丽的多,或者约翰抛出的反面次数比玛丽的多,但两者不能同时发生. (验证这一点!)因为这两种结果是对称的,所以它们发生的概率都是 $\frac{1}{2}$.

【习题】 由这个结论,推导出一个二项式求和的恒等式.

问题 97 首先,我们来作一些说明. 绝对值记号的出现使得该和式"让人难以理解". 然而,它关于这些 $\{x_i\}$ 是对称的,因而改变它们的顺序不会影响和的值. 于是我们可假设这一和取最大值时 $\{x_i\}$ 的选取满足 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$,从而 $|x_i-x_j|$ 可以写成没有绝对值记号的形式.

将该和式重新排序,对每个 i,将所有含 x_i 的项合并在一起. 于是那些具有正系数的 x_i 的值可以取得尽可能的大,而那些具有负系数的 x_i 的值则可以取得尽可能的小(保持关系式 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$). 为了有个直观的感受,可先考虑 $n=4$,且 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant 1$ 的情形.

$$\begin{aligned}S&=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_1-x_4|+\\&\quad|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+|x_3-x_4|\\&=(x_2-x_1)+(x_3-x_1)+(x_4-x_1)+\\&\quad(x_3-x_2)+(x_4-x_2)+(x_4-x_3)\\&=-3x_1-x_2+x_3+3x_4.\end{aligned}$$

显然,取 $x_1=x_2=0,x_3=x_4=1$,则 S 达到最大值.

现在我们来给出证明.

不失一般性,不妨设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$,且设 S 是这一和. 显然,

$$|x_i-x_j|=\begin{cases}x_i-x_j & (i>j),\\ x_j-x_i & (i<j).\end{cases}$$

因此,对 $j=1,2,\cdots,i-1$,有 $|x_i-x_j|=x_i-x_j$,而对 $j=i+1,\cdots,n$,则有 $|x_i-x_j|=x_j-x_i$.

于是

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{n}x_i[i-1-(n-i)]\\&=\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.\end{aligned}$$

如果 n 是偶数,设 $n=2m$,我们有

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=m+1}^{2m}(2i-2m-1)x_i-\\&\quad\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)x_i\\&\leqslant\sum_{i=m+1}^{2m}(2i-2m-1)\end{aligned}$$

(对应于 $x_1=\cdots=x_m=0,\ x_{m+1}=\cdots=x_{2m}=1$)

$$\begin{aligned}&=1+3+5+\cdots+(2m-1)\\&=\frac{m}{2}(2m)=\frac{(2m)^2}{4}=\frac{n^2}{4},\end{aligned}$$

即 $S \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

如果 n 是奇数,设 $n=2m+1$,则

$$S=\sum_{i=m+2}^{2m+1}(2i-2m-2)x_i-\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)x_i$$
$$\leqslant \sum_{i=m+2}^{2m+1}(2i-2m-2)$$
$$=2+4+6+\cdots+2m$$
$$=2(1+2+\cdots+m)$$
$$=2\left(\frac{m}{2}\right)(m+1)=\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$$
$$=\frac{n^2-1}{4},$$

即 $S \leqslant \frac{n^2-1}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

于是,$S(n)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

问题 98 想到的一般规律是

$$\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}=\frac{4n}{4n^2-1},\ n=1,2,3,\cdots,$$
$$(4n)^2+(4n^2-1)^2=(4n^2+1)^2,\ n=1,2,3,\cdots.$$

这些等式的验证是很容易的.

问题 99 解法一:如图 107,显然有

$$\tan\alpha=1,\tan\beta=\frac{1}{2},\tan\gamma=\frac{1}{3},$$

因此

$$\tan(\beta+\gamma)=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1=\tan\alpha.$$

于是,$\beta+\gamma=\alpha$.

解法二:设 $\overline{CD}=1$,$\triangle DBQ$ 与 $\triangle PDQ$ 是相似的,这是因为在 $\triangle DBQ$ 中,$\overline{BD}=\sqrt{10}$,$\overline{BQ}=2$,$\overline{QD}=\sqrt{2}$,在 $\triangle PDQ$ 中,$\overline{PD}=\sqrt{5}$,$\overline{DQ}=\sqrt{2}$,$\overline{PQ}=1$,因此前一三角形的边长是后一三角形的边长的 $\sqrt{2}$ 倍. 所以,$\angle PDQ=\angle DBQ=\gamma$,再对 $\triangle PDQ$ 运用外角定理即可得所要结论.

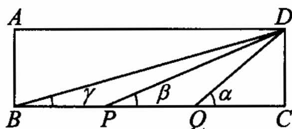


图 107

问题 100 我们可以将这六边形的边重新安排,使得每对相邻的边都是一条长为 a,另一条长为 b(如图 108). 因为 $ABCDEF$ 的每个内角都相等,所以它们都等于 $120°$. 由余弦定理,

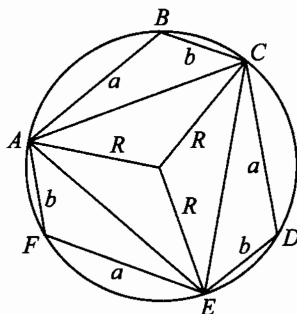


图 108

$$\overline{AC}^2=2R^2(1-\cos 120°)$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos 120°,$$

或者

$$3R^2=a^2+ab+b^2.$$

故

$$R=\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

问题 101 设 x 为进制的基数.

(1) $10201=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$.

(2) $10101=x^4+x^2+1=(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$,并且(因为 $x\geqslant 2$)两个因数均大于 1.

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

(3) $100011=x^5+x+1=(x^2+x+1)\cdot(x^3-x^2+1)$,同样两个因数均大于 1.

问题 102 将这 n 个人记为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,从 p_i 打给 p_j 的电话记为 $p_i\to p_j$. 设 $f(n)$ 为使得每个人都能获得完整信息所打电话的最少个数. 则下列特殊序列

$$p_1\to p_n,\ p_2\to p_n,\cdots,p_{n-1}\to p_n,$$
$$p_n\to p_{n-1},p_n\to p_{n-2},\cdots,\to p_n\to p_1$$

包含了 $2n-2$ 个电话,且使每个人都获得了信息,这就说明 $f(n)\leqslant 2n-2$.

假设有一个电话序列,它使得每个人都获得了全部信息. 考虑在电话一端第一次获得完整信息的(称该电话的接收者为 p)那个"关键"电话. 显然,除了 p 之外的这 $n-1$ 个人中的每一个在那个关键电话之前都至少打了一个电话. (否则 p 怎能获得完整信息?)并且,这 $n-1$ 个人(他们没有获得全部信息)中的每一个在那个关键电话后至少要收到一个电话. 因此,所给的序列至少应包含 $2(n-1)$个电话.

于是, $f(n)=2n-2$.

问题 103 设整数 $k\geqslant 2$. 如图 109 所示,大正方形可以被实线分割成 $2k$ 个不重叠的正方形(图中显示了 $k=4$ 的情形). 将这些正方形中的一个再分割成四个不重叠的正方形(见虚线)就产生了 $2k+3$ 个正方形的分割. 于是,对每个整数 $n\geqslant 6$,该正方形都能分割成 n 个不重叠的小正方形.

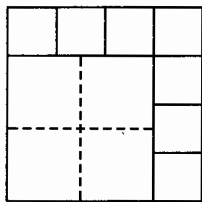


图 109

【思考】 一个大正方形能分割成 2、3 或 5 个正方形吗? 为什么?

问题 104 解法一:如图 110,设

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB},\vec{v}=\overrightarrow{AC},\vec{w}=\overrightarrow{AD},$$

那么已知条件即为

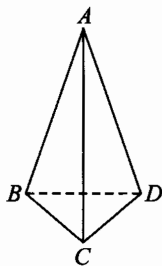


图 110

$$\vec{v}^2+(\vec{w}-\vec{u})^2=\vec{u}^2+(\vec{v}-\vec{u})^2+(\vec{w}-\vec{v})^2+\vec{w}^2.$$

因此

$$\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}-2\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{u}$$
$$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{w}-2\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}.$$

这可推得

$$(\vec{u}+\vec{w}-\vec{v})^2$$
$$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}-2\vec{w}\cdot\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}+2\vec{w}\cdot\vec{u}=0,$$

或

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}.$$

于是 $ABCD$ 是平行四边形.

解法二:设 A、B、C、D 在空间直角坐标系下的坐标分别为$(r,0,0)$,$(0,0,0)$,$(s,t,0)$,(u,v,w). (不失一般性,取 B 为原点,由 ABC 确定的平面为 x,y 平面.) 我们要证明 $u=r+s,v=t$,以及 $w=0$.

已知的边长间的关系等价于

$$(s-r)^2+t^2+u^2+v^2+w^2$$
$$=r^2+s^2+t^2+(u-s)^2+(v-t)^2+w^2+(u-r)^2+v^2+w^2,$$

或

$$-2rs=(v-t)^2+w^2+r^2+s^2+u^2-$$

$$2us-2ur,$$

或

$$0=(v-t)^2+w^2+(r+s-u)^2.$$

因此，$v-t=w=r+s-u=0$，满足要求.

问题 105 我们的证明是间接的. 假设共有 F 个面，且任何两个面的边数均不等. 则边数最少的面至少有三条边，边数次少的面至少有四条边，如此等等. 边数最多的面至少有 $F+2$ 条边. 因为这个“最大”面的每条边都有一个边界面，所以该多面体至少有 $F+3$ 个面. 矛盾！

以类似的方法，可以证明至少存在两对面，每一对面具有相同的边数. 另外，将面和边数分别换成顶点和顶点次数（即由某个顶点出发的边数），还可以得到相关的结论.

问题 106 设 BC 与 PR 交于点 T. 我们有

$$S_{PSBT}=S_{\triangle PSB}+S_{\triangle PBT}=\frac{3\sqrt{3}}{4}(\overline{SB}+\overline{BT}).$$

因为以 P 点为中心顺时针方向旋转 $60°$ 可使 A 点转到 B 点，S 点转到 T 点，所以我们有 $\overline{BT}=\overline{AS}=2$. 因此 $\overline{SB}+\overline{BT}=3$，于是所要求的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

问题 107 解法一（数学归纳法）：当 $n=1$ 时结论成立. 假设 $n=k$ 时结论成立，即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2k-1}$$
$$=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}.$$

则我们可推出

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}$$
$$=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}.$$

即当 $n=k+1$ 时结论也成立.

解法二：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-$$
$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-$$
$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

问题 108 解法一（数学归纳法）：因为

$$2+h(1)=2+1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=2h(2),$$

所以命题对 $n=2$ 成立. 如果对某个 $k\geqslant 2$，有

$$k+h(1)+\cdots+h(k-1)=kh(k),$$

那么，两边同时加上 $1+h(k)$ 后，我们得

$$k+1+h(1)+h(2)+\cdots+h(k-1)+h(k)$$
$$=kh(k)+1+h(k)=(k+1)h(k)+1$$
$$=(k+1)\left[h(k+1)-\frac{1}{k+1}\right]+1$$
$$=(k+1)h(k+1).$$

即命题对 $k+1$ 也成立.

解法二：

$$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)$$
$$=n+1+$$
$$1+\frac{1}{2}+$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$$
$$\vdots$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$$
$$=n+(n-1)+(n-2)\frac{1}{2}+(n-3)\frac{1}{3}$$
$$+\cdots+2\frac{1}{n-2}+1\frac{1}{n-1}$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$= n+(n-1)+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{n}{n-2}-1\right)+\left(\frac{n}{n-1}-1\right)$$
$$= n+n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)$$
$$= 1+n\left[h(n)-\frac{1}{n}\right]= nh(n).$$

更一般地，如果 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$n=1,2,3,\cdots$，那么

$$\sum_{r=1}^{n-1}S_r=\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{r}a_t=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=t}^{n-1}a_t$$
$$=\sum_{t=1}^{n-1}(n-t)a_t$$
$$=n\sum_{t=1}^{n-1}a_t-\sum_{t=1}^{n-1}t\,a_t$$
$$=n\,S_{n-1}-\sum_{t=1}^{n-1}t\,a_t.$$

在这种情形下，取 $a_t=\frac{1}{t}$，我们就得到了问题所需的结论.

问题 109 对任何 $k\geqslant 0$，五个整数 $k+1,k+2,k+3,k+4,k+5$ 除以 5 的余数分别是 0，1，2，3，4(顺序可能不同). 于是，对模 5，所给的和就同余于

$$0^n+1^n+2^n+3^n+4^n=1^n+2^n+3^n+4^n.$$

接着，来观察一下关于模 5 的下列同余式. 对于非负整数 m，这些都是容易得到的：

$$2^{4m}\equiv 1,2^{4m+1}\equiv 2,2^{4m+2}\equiv 4,2^{4m+3}\equiv 3,$$
$$3^{4m}\equiv 1,3^{4m+1}\equiv 3,3^{4m+2}\equiv 4,3^{4m+3}\equiv 2,$$
$$4^{4m}\equiv 1,4^{4m+1}\equiv 4,4^{4m+2}\equiv 1,4^{4m+3}\equiv 4.$$

因此，所给的和对模 5 同余于下列数：

$$1+1+1+1=4\ (n=4m),$$
$$1+2+3+4\equiv 0\ (n=4m+1),$$
$$1+4+4+1\equiv 0\ (n=4m+2),$$
$$1+3+2+4\equiv 0\ (n=4m+3).$$

于是，对于任何 $k\geqslant 0$ 以及任何不是 4 的倍数的 n，所给的和都能被 5 整除；而对于任何$k\geqslant 0$ 以及任何是 4 的倍数的 n，所给的和都不能被 5 整除.

解答按如下方式可以写得更紧凑. 关于模 5，我们有

$$1^n+2^n+3^n+4^n$$
$$\equiv 1^n+2^n+(5-2)^n+(5-1)^n$$
$$\equiv 1^n+(-1)^n+2^n+(-2)^n.$$

如果 n 是奇数，则 $(-1)^n=-1,(-2)^n=-2^n$，于是，$1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 0$.

如果 n 是偶数，则设 $n=2m$，且有 $(-1)^n=1,(-2)^n=2^n$. 于是

$$1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 2(1^{2m}+2^{2m})$$
$$=2(1+4^m)$$
$$\equiv 2[1+(-1)^m].$$

当 m 是奇数时它等于 0；当 m 是偶数时它不等于 0.

因此，当且仅当 n 不是 4 的倍数时，$1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被 5 整除.

问题 110 构造任意 $\triangle ABC$，使得 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，并构造一条长度等于 ABC 周长的线段 DE. 构造 UV，使得 $\frac{\overline{UV}}{AB}=\frac{p}{DE}$. 构造 $\triangle UVW$，使得 $\angle U=\alpha$，$\angle V=\beta$. 这就是所要的三角形.

问题 111 如果我们将 y 和 z 看成是固定的，而将 x 看成是变量，则 $P(x,y,z)$ 就是一个关于 x 的多项式. 我们看到当且仅当 $P(-y-z,y,z)=0$ 时，$x-(-y-z)$ 是 $P(x,y,z)$ 的因式. 于是，我们来寻找使得 $P(-y-z,y,z)\equiv 0$ 成立的 k 的值. 该恒等式是

$$(-y-z)^5+y^5+z^5+$$
$$k[(-y-z)^3+y^3+z^3]\times$$
$$[(-y-z)^2+y^2+z^2]\equiv 0.$$

化简后得

$$-(5+6k)yz(y+z)(y^2+yz+z^2)\equiv 0,$$

因此，$k=-\frac{5}{6}$.

对于第二部分，设 x、y、z 是下列三次方

程的根，

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0, \qquad (1)$$

其中 $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$.

设 $S_n = x^n + y^n + z^n$，

那么

$$S_1 = a, S_2 = a^2 - 2b. \qquad (2)$$

把方程(1)的根代入并相加，可得

$$S_3 - aS_2 + bS_1 - 3c = 0.$$

由(2)式得，

$$S_3 = a^3 - 3ab + 3c. \qquad (3)$$

分别用 t 和 t^2 乘(1)式，再对所有根求和，得

$$S_4 - aS_3 + bS_2 - cS_1 = 0,$$
$$S_5 - aS_4 + bS_3 - cS_2 = 0,$$

由(2)式和(3)式得

$$S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2,$$
$$S_5 = a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc.$$

最后可得

$$\begin{aligned}
&6(x^5+y^5+z^5) - \\
&5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\
=&6S_5 - 5S_3S_2 = a^2(a^3 - 5ab + 15c) \\
=&(x+y+z)^2[(x+y+z)^3 - \\
&5(x+y+z)(xy+yz+zx) + 15xyz] \\
=&(x+y+z)^2[(x^3+y^3+z^3+6xyz - \\
&2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)].
\end{aligned}$$

问题 112 由 $(1-p)^2 \geqslant 0$，得 $1+p+p^2 \geqslant 3p > 0$. 对 q、r 和 s 有类似结论. 将这些不等式相乘，即得所要结论.

问题 113 记 $x=[x]+e, 0 \leqslant e < 1$，则

$$[nx] = n[x] + [ne],$$

由于 $[ne] \leqslant ne < n$，故

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x] + \left[\frac{[ne]}{n}\right] = [x].$$

问题 114 A 组等式的一般规律为：

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i \frac{1}{i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j},\ n = 1,2,3,\cdots.$$

可以用数学归纳法来证明该等式. 当 $n=1$ 时等式成立. 假设 $n=k$ 时它成立，即

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C_k^i \frac{1}{i} = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}.$$

那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C_{k+1}^i \frac{1}{i} \\
=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}(C_k^{i-1} + C_k^i)\frac{1}{i} \\
=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C_k^{i-1}\frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C_k^i\frac{1}{i} \\
=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C_{k+1}^i\frac{1}{k+1} + \\
&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) \\
=&\frac{1}{k+1}[1-(1-1)^{k+1}] + \\
&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) \\
=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

B 组等式的一般规律为：

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n},$$
$$n = 1,2,3,\cdots.$$

我们来给出一个直接的证明. 通过改变和项的顺序，等式的左边等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} \\
=&\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{j}(-1)^{i+1}C_n^i \\
=&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i \\
=&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\Big[\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^{i+1}\left(C_{n-1}^{i-1}+C_{n-1}^i\right) + \\
&(-1)^{n+1}\Big] \\
=&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\{(-1)^{j+1}[C_{n-1}^{j-1}+C_{n-1}^j - C_{n-1}^j -
\end{aligned}$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$\mathrm{C}_{n-1}^{j+1}+\cdots+(-1)^{n+1}]\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\mathrm{C}_{n-1}^{j-1}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\mathrm{C}_{n}^{j}$$

$$=\frac{1}{n}[1-(1-1)^{n}]=\frac{1}{n}.$$

A 组等式与 B 组等式之间的关系可以归纳如下．假设给定一个实数列(x_n)，定义数列(y_n)为

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{C}_n^i x_i,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

那么

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{C}_n^i y_i,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

我们需要证明，对每个 n，

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{C}_n^i\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\mathrm{C}_i^j x_j.$$

改变和项的顺序，等式的右边等于

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}x_j\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_i^j$$

$$=x_n+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}x_j\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_i^j.$$

又，当 $1\leqslant j\leqslant n-1$ 时，

$$\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_i^j$$

$$=\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{j!(i-j)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-j)!j!}\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\frac{(n-j)!}{(n-i!)(i-j)!}$$

$$=\mathrm{C}_n^j\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\mathrm{C}_{n-j}^{i-j}$$

$$=(-1)^{j}\mathrm{C}_n^j\sum_{r=0}^{n-j}(-1)^{r}\mathrm{C}_{n-j}^{r}$$

$$=(-1)^{j}\mathrm{C}_n^j(1-1)^{n-j}=0.$$

于是结论成立．

就是说，如果 A、B 两组等式中有一组已经给出，那么另一组也可以由此得出．

问题 115 通过考虑所有点的凸包，我们总能选取两点，设为 A 和 B，使得剩下的 $2n+1$ 个点落在直线 AB 的同一边．将这些点标记为 $P_1,P_2,\cdots,P_{2n+1}$，使其满足

$$\angle AP_1B\leqslant\angle AP_2B\leqslant\cdots\leqslant\angle AP_{2n+1}B.$$

事实上，所有这些夹角都是不同的．因为如果有$\angle AP_iB=\angle AP_jB$，那么四点 A、B、P_i、P_j 共圆．因此，过点 A、B 及 P_{n+1} 的圆使得 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 在该圆的外部，而 P_{n+2}，$P_{n+3},\cdots,P_{2n+1}$在该圆的内部．

这是问题 26 的推广．

【思考】 将结果拓展到空间中的点及球面上．

问题 116 解法一：极限情况出现在当其中有两条线段平行于平面时，此时，$a=b=\infty$，$c=d$，d 为从点 P 到该平面的垂直距离．从而，我们需证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}.$$

设 A、B、C 是这些线段在该平面上的端点．则四面体 $PABC$ 的体积为$\frac{abc}{6}=\frac{dS_{\triangle}}{3}$，其中 $S_{\triangle}$是$\triangle ABC$ 的面积．任何平面图形面积的平方等于该图形在三个两两垂直的平面上的投影面积的平方和．于是

$$S_{\triangle}^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

因此，

$$a^2b^2c^2=4d^2S_{\triangle}^2=d^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

从而

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}.$$

解法二（解析几何法）：以 P 作为原点，三条直线段所在的直线作为坐标轴．则表示该平

有一位数学家他名叫本，
数起数来真叫人有点儿胸闷。
你听他说：
“每当我数完脚趾十根，
只得从头再数，问也不用问。”

面的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

于是,从 P 到该平面的距离可由下式给出:

$$\frac{1}{\sqrt{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}}.$$

问题 117 因为

$$(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

所以对任意三个正数,左边的不等式成立.为证明第二个不等式,我们利用条件 $c+a>b,a+b>c,b+c>a$(三角形的边长均满足),可推导出

$$|a-b|<c,|b-c|<a,|c-a|<b,$$

因此,

$$4(bc+ca+ab)-(a+b+c)^2$$
$$=c^2-(a-b)^2+a^2-(b-c)^2+b^2-(c-a)^2$$
$$>0.$$

对右边不等式的另一个证明是注意到 $4(bc+ca+ab)-(a+b+c)^2$ 对应于 16 乘以边长为 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 的三角形的面积的平方.(注意,如果 a、b、c 是三角形的边长,那么对任何 $n>1$,$a^{\frac{1}{n}}$、$b^{\frac{1}{n}}$、$c^{\frac{1}{n}}$ 也可以是三角形的边长.)

问题 118 解法一:更一般地,设 v_a、v_b 分别是安迪和鲍勃的速度,t_a、t_b 分别是安迪和鲍勃在他们俩第一次相遇后首次到达 B 镇和 A 镇所花的时间.两司机的行进过程可以用图 111 中的时空线来表示.

如果 t 是从正午到他们首次交会所用的时间,则由图可知

$$v_a=\frac{v_b t}{t_a},\quad v_b=\frac{v_a t}{t_b}.$$

因此,

$$t=\sqrt{t_a t_b},\quad \frac{v_a}{v_b}=\sqrt{\frac{t_b}{t_a}}.$$

对于本问题给出的数据,有 $t=30$ 分,$v_a=60$ 千米/时.

为了求得以后交会的时间,将安迪和鲍勃的时空线如图延伸,可以发现五次交会后即进入周期模式,且该模式关于第三次交会点中心对称,而第三次交会点正好在 B 镇.从而得两人第 n 次交会的时间为正午之后的第 $30+60(n-1)$ 分钟.

解法二:从已知条件可得以下等式:

$$(t+20)v_a=(t+45)40=(v_a+40)t=60d,$$

其中 d(单位:千米)是 A 与 B 之间的距离,v_a(单位:千米/时)是安迪的速度,t(单位:分)是从正午到第一次交会时所花的时间,因数60 为时间单位间的换算.由这可得 $20v_a=40t$,$v_a t=45\times 40$,从而 $v_a=2t$,$2t^2=45\times 40$.解得 $t=30$ 分,$v_a=60$ 千米/时,且 $d=50$ 千米.

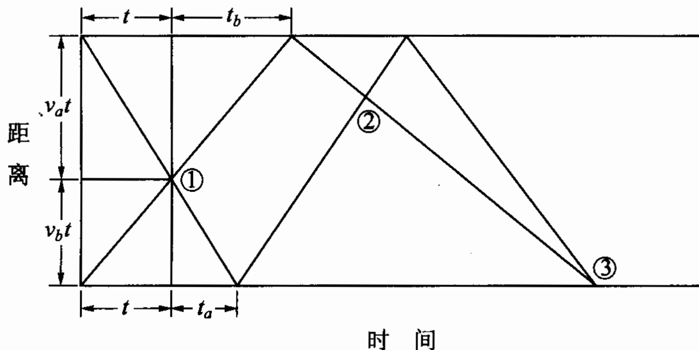


图 111

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

在首次交会后，两车以100千米/时的相对速度分离，20分钟后安迪到达B镇. 然后以20千米/时的相对速度同方向开了25分钟，直到鲍勃到达A镇. 在这段时间里，他们先是远离了$\frac{100}{3}$千米，又接近了25千米. 当鲍勃离开A镇后，他又向从B镇开出的安迪接近，他们的相对速度是100千米/时. 于是，15分钟之后他们就会交会. 从第一次交会到第二次交会总共花了60分钟.

类似的讨论说明，第三次交会是在下一个60分钟后的B镇. 现在由对称性，可知两次交会总有60分钟的间隔. 于是，两人第n次交会是在正午过后的第$30+60(n-1)$分钟.

问题 119 因为$\angle BCG=\angle GCO=60°$，且$B$、$C$、$O$、$G$共圆，所以$\angle BOG=\angle GBO=60°$，因此$\triangle BGO$是等边三角形. 设$X$是大六边形的中心. 绕点$G$逆时针旋转60°，则点$B$和点$C$分别落在$O$和$X$处. 因此，$\overline{BC}=\overline{OX}$，且

$$\begin{aligned}\overline{FO}&=\overline{FC}+\overline{CO}=2\,\overline{BC}+\overline{CO}\\&=2\,\overline{OX}+\overline{CO}=\overline{OX}+\overline{CX}=\overline{OJ}.\end{aligned}$$

问题 120 解法一：已知条件等价于

$$(1+x)^n\equiv 1+x^n \pmod 2). \quad (*)$$

现在注意到

$$(1+x)^2\equiv 1+x^2 \pmod 2),$$

$$(1+x)^4\equiv(1+x^2)^2\equiv 1+x^4 \pmod 2),$$

利用数学归纳法，我们可以证明

$$(1+x)^{2^k}\equiv 1+x^{2^k} \pmod 2),$$

即当n是2的方幂时(*)式成立. 如果n不是2的方幂，那么

$$n=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots$$

中至少有两个不同的k_i. 于是

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=(1+x)^{2^{k_1}}(1+x)^{2^{k_2}}\cdots\\&\equiv(1+x^{2^{k_1}})(1+x^{2^{k_2}})\cdots \pmod 2),\end{aligned}$$

故(*)式不成立. 因此当且仅当n是2的方幂时，$C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1}$都是偶数.

解法二：为了寻找解题的途径，我们来考虑为什么$495=C_{12}^4$是奇数. 我们发现

$$C_{12}^4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}.$$

观察2作为因数在分子和分母中出现的次数. 能整除12的2的最高次幂是4，这个方幂与分母中整除4的2的最高次幂一致. 所以，2必须是在两个乘积中分别整除下一个偶数10或2的2的最高次方幂. 于是，分子中的每个因数2会抵消分母中的每个因数2. 将这一讨论加以推广，并应用于$n=2^kp$，其中p是奇数，我们来证明$C_n^{2^k}$是奇数.

考虑

$$\begin{aligned}C_n^{2^k}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-2^k+1)}{2^k(2^k-1)\cdots1}\\&=\prod_{i=0}^{2^k-1}\frac{n-i}{2^k-i}.\end{aligned}$$

对满足$0\leqslant i\leqslant 2^k-1$的每个$i$，记$i=2^rq$，这里$q$是奇数且$r<k$. 那么关于模$2^r$及模$2^{r+1}$，$2^k-i\equiv n-i\equiv -i$. 因此2恰好以相同的幂次整除$n-i$及$2^k-i$，于是$C_n^{2^k}$是奇数. 如果$n$不是2的方幂，那么$p>1$且$1\leqslant 2^k\leqslant n-1$. 因此，并非所有的$C_n^j(1\leqslant j\leqslant n-1)$都是偶数. 如果$n$是2的方幂，类似的讨论可说明能整除$C_n^j(1\leqslant j\leqslant n-1)$的分子的2的最高次方幂比能整除其分母的2的最高次方幂更高.

问题 121 当$n=1,2,\cdots$时，$x-y$是x^n-y^n的一个因式. 因为$2141-1863=1770-1492=278$，所以已知的表达式能被278整除. 类似地，$2141-1770=1863-1492=371$，它与278互素，而且也整除所给的表达式. 于是，$278\times371=53\times1946$，是原表达式的因数.

问题 122 考虑多项式$Q(x)=xP(x)-1$. 由$P(x)$的性质知，$Q(x)$是一个$n+1$次的多项式，且在$x=1,2,\cdots,n+1$处有零点. 又因

为 $Q(0)=-1$，所以

$$Q(x)=\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n-1)}{(-1)^n(n+1)!}.$$

因此，$Q(n+2)=(-1)^n$. 故

$$P(n+2)=\frac{1+(-1)^n}{n+2}=\begin{cases}0 & (n\text{ 是奇数}),\\ \dfrac{2}{n+2} & (n\text{ 是偶数}).\end{cases}$$

问题 123 假设 $\ln x=\frac{f(x)}{g(x)}$，且 n 是任意正整数. 那么

$$\frac{f(x^n)}{g(x^n)}=\ln x^n=n\ln x=\frac{nf(x)}{g(x)}.$$

因此，对于每个 n，

$$f(x^n)g(x)=nf(x)g(x^n).$$

如果 $f(x)=a_px^p+\cdots+a_0$，$g(x)=b_qx^q+\cdots+b_0$，那么

$$f(x^n)g(x)=a_pb_qx^{np+q}+\cdots+a_0b_0.$$

但是，$nf(x)g(x^n)=na_pb_qx^{p+nq}+\cdots+na_0b_0$.

比较两者的首项系数得，对每个 n，有 $a_pb_q=na_pb_q$，这是不可能的.

【评论】 更一般地，可以证明 $\ln x$ 不是代数的，即 $y=\ln x$ 不满足任何形如

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

的方程，其中每个 $P_i(x)$ 都是多项式. 这可以由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

这一事实导出. 或者，可以假设上述方程是次数最低的，再用 x^m 代替 x，导出一个次数更低的方程，从而得到矛盾.

问题 124 设司机看手表的时刻是 h 时 m 分 $(0\leqslant h\leqslant 11)$. 因为分针转 12 圈时时针转 1 圈，我们有

$$5h+\frac{m}{60}\cdot 5=m,$$

因此，

$$m=\frac{60}{11}h.$$

该行程花了$14\frac{6}{11}$分钟，而火车是在整分钟时离开车站的，因此 $m-\frac{6}{11}$必须是整数，即$\frac{60}{11}h-\frac{6}{11}$是整数，或 $60h-6\equiv 0 \pmod{11}$，或 $10h\equiv 1 \pmod{11}$，或 $h=10$(因为 $0\leqslant h\leqslant 11$). 于是，$m=54\frac{6}{11}$，且火车在(上午或下午)10:40 离开车站.

问题 125 假设所给的各边长度为 a、b、c、d，且 AB 平行于 CD，$c>a$，如图 112 所示. 如果 X 是 CD 上的点，且有$\overline{DX}=a$，则$\triangle XBC$ 的边长分别为 d、b 和 $c-a$. 于是，我们先构造具有这些边长的$\triangle XBC$，然后将 CX 延长至 D，使得$\overline{CD}=c$，然后画过 B 且平行于 CD 的直线，最后确定点 A，使得$\overline{BA}=a$.

图 112

问题 126 假设地砖的边具有单位长度. 观察用它们构成一个边长为 x 的等边三角形所需的块数是

$$1+3+\cdots+(2x-1)=x^2.$$

任何满足条件的六边形的外接三角形一定是一个等边三角形，设其边长为 l(见图 113). 该六边形可以通过去掉边长分别为 a、b、c 的等边三角形的角来获得，其中 $a\geqslant b\geqslant c>0$，且 $l>a+b$.

因此，当且仅当

$$n=l^2-a^2-b^2-c^2,$$

其中 $a\geqslant b\geqslant c>0$，且 $l>a+b$ 时，n 满足条件.

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

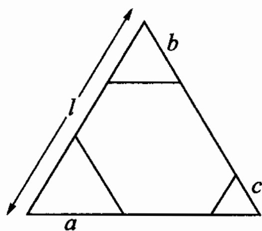


图 113

【习题】 如果 $L=2l-(a+b+c)$，$A=l-(b+c)$，$B=l-(a+c)$，$C=l-(a+b)$，导出恒等式 $L^2-A^2-B^2-C^2=l^2-a^2-b^2-c^2$.

问题 127 因为 $P(x)$ 是整系数多项式，且 a、b、c 是不同的整数，由因子定理知

$$\frac{P(a)-P(b)}{a-b},\quad \frac{P(b)-P(c)}{b-c},\quad \frac{P(c)-P(a)}{c-a}$$

都是整数. 假设 $P(a)=b$，$P(b)=c$，$P(c)=a$，那么

$$\frac{b-c}{a-b},\ \frac{c-a}{b-c},\ \frac{a-b}{c-a}$$

都是整数，而它们的乘积显然是 1. 因此，它们每个数的绝对值都是 1，所以可知

$$|a-b|=|b-c|=|c-a|.$$

但这是不可能的，因为 a、b、c 是互不相同的.

由类似的讨论可以证明，如果 a_1，a_2，…，a_n 是不同的整数，那么以下等式不可能全成立：

$$P(a_1)=a_2, P(a_2)=a_3, \cdots,$$
$$P(a_{n-1})=a_n, P(a_n)=a_1.$$

问题 128 因为

$$a_1=\sum_{i=1}^{n} r_i,\quad a_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_i r_j,$$

从而有

$$a_1^2=\sum_{i=1}^{n} r_i^2+2a_2.$$

于是，所给的不等式等价于

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2+2a_2\right)\geqslant 2na_2,$$

或

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} r_i^2\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_i r_j,$$

或

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(r_i-r_j)^2\geqslant 0.$$

最后一个不等式显然成立. 当且仅当 $r_1=r_2=\cdots=r_n$ 时等号成立.

问题 129 对任意正数 n(不必是整数)，考虑退化(或极限)情况 $A=\pi$，$B=C=0$，可得

$$[k(n)+\sin 0]+[k(n)+\sin 0]$$
$$\geqslant k(n)+\sin\frac{\pi}{n}.$$

因此

$$k(n)\geqslant\sin\frac{\pi}{n}.$$

特别地，当 $n=1$ 时我们有 $k(1)\geqslant 0$. 另一方面，(由正弦定理)可知 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 是某个与 $\triangle ABC$ 相似的三角形的三边长，因此 $k(1)=0$.

假设 $n\geqslant 2$. 因为当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin\theta$ 是一个递增函数，而且 $\frac{A}{n}\leqslant\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{\pi}{2}$，从而有 $\sin\frac{A}{n}\leqslant\sin\frac{\pi}{n}$. 因此

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{B}{n}\right)+\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{C}{n}\right)$$
$$\geqslant 2\sin\frac{\pi}{n}\geqslant\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{A}{n}.$$

对于 A、B、C 的任何置换，可得类似的不等式. 因此 $k(n)=\sin\frac{\pi}{n}$.

【评论】 该结果可以推广到任何实数 $n\geqslant 1$. 如果 $u+\sin\frac{A}{n}$，$u+\sin\frac{B}{n}$，$u+\sin\frac{C}{n}$ 是三角形的边长，那么由两边之和大于第三边的事实得

$$u\geqslant\sin\frac{A}{n}-\sin\frac{B}{n}-\sin\frac{C}{n},$$

且对于 A、B、C 的任何置换，具有对称的不等式. $k(n)$ 是这样的 u 中最小的，因此我们一定有

$$k(n)=\max_{A+B+C=\pi}\left\{\sin\frac{A}{n}-\sin\frac{B}{n}-\sin\frac{C}{n}\right\}$$
$$=\max\left\{\sin\frac{A}{n}-2\sin\frac{B+C}{2n}\cos\frac{B-C}{2n}\right\}.$$

对于每个固定的 A 值，$B+C$ 的值也被固定，故当

$$\cos\frac{B-C}{2n}=\cos\frac{(\pi-A)-2B}{2n}$$

极小时它达到极大. 这时 $B=0$ 或 $B=\pi-A$，即 $C=0$. 于是

$$k(n)=\max_{A+B=\pi}\left\{2\sin\frac{A-B}{2n}\cos\frac{A+B}{2n}\right\}$$
$$=2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}=\sin\frac{\pi}{n}.$$

类似地可证

$$\min_{A+B+C=\pi}\left\{\sin\frac{A}{n}-\sin\frac{B}{n}-\sin\frac{C}{n}\right\}$$
$$=-2\sin\frac{\pi}{2n}.$$

对于 $0<n<1$ 的情形显然并不容易分析.

问题 130 对于 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，重复利用不等式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，则有

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\geqslant n\cdot 1,$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n-1+2}{2}\right)^2\geqslant(n-1)\cdot 2,$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n-2+3}{2}\right)^2\geqslant(n-2)\cdot 3,$$
$$\cdots$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2\geqslant 2\cdot(n-1),$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{1+n}{2}\right)^2\geqslant 1\cdot n.$$

将这些不等式相乘，得

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}\geqslant(n!)^2,$$

或

$$(n+1)^n\geqslant 2^n n!. \qquad (1)$$

从这可导出

$$6^n(n!)^2\leqslant 6^n\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right]^2$$
$$=2^n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\cdot 3^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$
$$=(n+1)^n\left(\frac{3n+3}{2}\right)^n$$
$$\leqslant(n+1)^n\left(\frac{4n+2}{2}\right)^n$$
$$=(n+1)^n(2n+1)^n. \qquad (2)$$

这最后一个不等式是由显然成立的不等式 $3n+3\leqslant 4n+2$ 得到的，其中 $n=1,2,3,\cdots$.

在(1)式和(2)式中，只有取 $n=1$ 时等号成立.

不等式(1)也可以用数学归纳法来证明. 假设 $n=k$ 时不等式成立，那么因为(由二项式定理) $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\geqslant 2$，所以我们有

$$(k+2)^{k+1}\geqslant 2(k+1)^{k+1}\geqslant 2(k+1)2^k\cdot k!$$
$$=2^{k+1}(k+1)!.$$

问题 131 解法一：设 $a=z_1+z_2+z_3$，$b=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$c=z_1z_2z_3$. 则 z_1、z_2、z_3 是三次方程 $z^3-az^2+bz-c=0$ 的根. 由已知条件得 $c=1$，$a=b$. 于是该三次方程可简化为 $z^3-az^2+az-1=0$，显然 1 是它的一个根.

解法二：由(a)、(b)可得

$$z_2+z_3+\frac{1}{z_2z_3}=\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+z_2z_3,$$

从而 $(1-z_2)(1-z_3)=\left(1-\frac{1}{z_2}\right)\left(1-\frac{1}{z_3}\right)$. 等式两边乘以 z_2z_3，得

$$(z_2z_3-1)(1-z_2)(1-z_3)=0.$$

于是有 $z_2=1$，或 $z_3=1$，或 $z_2z_3=1$，而当 $z_2z_3=1$ 时 $z_1=1$.

问题 132 只要证明从任何顶点出发的中线

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

的长不小于从同一顶点出发的角平分线的长即可. 于是,设 A 是 $\triangle ABC$ 的顶点, AM 是中线, AT 是角平分线. 不失一般性,不妨设 $\overline{AB}\leqslant\overline{AC}$(如图114).

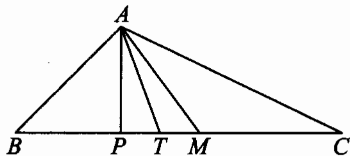


图 114

因为 $\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$,从而 $\overline{BT}\leqslant\overline{BM}$.

于是, $\overline{AT}\leqslant\overline{AM}$.

(为说明这一点,注意到如果 AP 是高,那么 $\angle PAB\leqslant\angle PAC$, 从而 $\angle PAB\leqslant\angle TAB=\angle TAC\leqslant\angle PAC$. 于是, T 落在 P 与 M 之间.)

问题 133 当取 $n=5$ 这一特殊情形时,对应于 $r=0,1,\cdots,5$ 的 S 值分别是 $1,-4,6,-4,1,0$. 于是,我们猜测

$$S=(-1)^rC_{n-1}^r.$$

为证明这一点,注意到对任何函数 f,有

$$\sum_{k=1}^{r}[f(k)-f(k-1)]=f(r)-f(0).$$

取 $f(k)=(-1)^kC_{n-1}^k$,则

$$\sum_{k=1}^{r}[(-1)^kC_{n-1}^k-(-1)^{k-1}C_{n-1}^{k-1}]$$
$$=(-1)^rC_{n-1}^r-1.$$

于是,

$$(-1)^rC_{n-1}^r=1+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})$$
$$=\sum_{k=0}^{r}(-1)^kC_n^k.$$

问题 134 简单变形后可以看出所给不等式等价于

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2\geqslant0.$$

该不等式显然成立. 等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立.

也可以从

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\geqslant\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]^2$$
$$\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right),\qquad(*)$$

得到

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}$$
$$\geqslant\max\left\{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right\}.$$

【思考】 验证步骤(*).

问题 135 解法一:如果所有这些弦都是共点的,那么由对称性,我们可以预计这一公共点落在抛物线的对称轴 x 轴上. 于是我们就要验证这些弦在 x 轴上的截距是否与弦的端点无关.

如图115,假设在顶点(0,0)处的直角所对的弦的端点坐标为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2),且该弦与 x 轴的交点坐标为 $(x_0,0)$. 则自然有

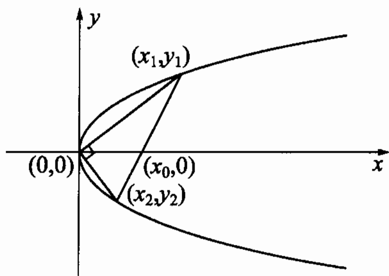


图 115

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

因此,

$$x_1x_2+y_1y_2=0.\qquad(1)$$

因为端点落在抛物线上,所以

$$y_1^2=4ax_1,\ y_2^2=4ax_2.\qquad(2)$$

由(1)式和(2)式,我们有

$$(y_1y_2)^2=16a^2x_1x_2=-16a^2y_1y_2.$$

因此

$$4a(x_2y_1-x_1y_2)=y_1y_2(y_2-y_1)$$
$$=-16a^2(y_2-y_1).$$

由$\frac{y_1}{y_1-y_2}=\frac{x_1-x_0}{x_1-x_2}$,我们得

$$x_0=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\frac{4a(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=4a.$$

因此,所有弦都包含点$(4a,0)$.

解法二:设(x_1,y_1)和(x_2,y_2)是满足如上条件的弦的端点.因为从原点到这两点的直线的斜率互为负倒数,故

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \qquad (3)$$

如果该弦的方程是$y=mx+b$,那么x_1和x_2是二次方程$(mx+b)^2=4ax$的根,即$m^2x^2+(2bm-4a)x+b^2=0$.于是

$$x_1x_2=\frac{b^2}{m^2},$$
$$y_1y_2=(mx_1+b)(mx_2+b)$$
$$=m^2x_1x_2+mb(x_1+x_2)+b^2=\frac{4ab}{m}.$$

因此,由(3)式知,$\frac{b^2}{m^2}+\frac{4ab}{m}=0$,或$b=-4am$.于是,顶点在原点的直角所对的每条弦的方程具有形式$y=mx-4am=m(x-4a)$,显然该直线必过点$(4a,0)$.

问题 136 设a、m、b分别是$\triangle AND$、$\triangle MDC$、$\triangle BNC$在DC上的高的长度.假设$\overline{AM}=r\ \overline{AB}$.那么$\overline{NC}=r\ \overline{DC}$,且$m=(1-r)a+rb$.(如果$AB/\!/DC$,后一等式显然成立.不然的话,可以由考虑三个斜边都在AB上、且有一直角边在DC上的相似的直角三角形来得到该等式.)

于是有

$$S_{\triangle ADN}=\frac{1}{2}a\cdot\overline{DN}=\frac{1}{2}a(1-r)\cdot\overline{DC},$$

$$S_{\triangle MDC}=\frac{1}{2}m\cdot\overline{DC},$$

$$S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}b\cdot\overline{NC}=\frac{1}{2}br\cdot\overline{DC}.$$

因此,$S_{\triangle MDC}=S_{\triangle ADN}+S_{\triangle BNC}$.在等式两边各减去$S_{\triangle PDN}$和$S_{\triangle QNC}$,即得所要的结果.

问题 137 在这些点中任选四个.在题目所给的情形中,存在唯一确定的球包含它们.设该球的中心是C,半径是r.如果d是C与第五个点之间的距离,那么中心为C、半径为$\frac{1}{2}(r+d)$的球(如果这第五个点不在该球面上)到这五个点的距离都相等.于是,至少有五个球满足所需的条件.

根据这些点的位置的不同,可能存在有限多个或无限多个其他的解.包含其中三个点的球的中心的轨迹是一条直线,包含另两个点的球的中心的轨迹是一个平面.该直线可能平行于该平面,或与该平面交于一点,也可能全部落在该平面上.如果O是直线与平面的交点,那么用与第一段中所描述的类似方法,我们可以找到以O为中心且与该五点等距的球(其中三点在球面一边,另两点在另一边).

问题 138 我们有

$$5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}$$
$$\equiv 2^{2n+1}+2^{2n+1}+2^{2n+1}$$
$$\equiv 0 \pmod 3,$$

并且

$$5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}$$
$$=(11-6)^{2n+1}+11^{2n+1}+(11+6)^{2n+1}$$
$$\equiv(-6)^{2n+1}+6^{2n+1}$$
$$\equiv 6^{2n+1}(-1+1)$$
$$\equiv 0 \pmod{11}.$$

于是,所给的和能被3与11的乘积整除.

问题 139 解法一:在公式$(x+1)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^rx^r$中令$x=1$,得

$$2^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r.$$

设

$$Q(x)=C_x^0+C_x^1+\cdots+C_x^n.$$

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

因为对于 $0\leqslant r\leqslant n$,

$$C_x^r=\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!},$$

所以 $Q(x)$ 是个 n 次多项式. 并且对于 $x=0,1,2,\cdots,n$,有 $P(x)=Q(x)$. 因此多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 必须恒等,且

$$\begin{aligned}P(n+1)&=Q(n+1)\\&=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+\cdots+C_{n+1}^n\\&=2^{n+1}-C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}-1.\end{aligned}$$

解法二:对每个固定的 n,该多项式被其在 $0,1,\cdots,n$ 处的取值所唯一确定. 记该多项式为 P_n,以说明它是依赖于 n 的. 对 $n\geqslant1$ 及 $x=0,1,2,\cdots,n-1$,我们有

$$P_{n-1}(x)=P_n(x+1)-P_n(x).\quad(*)$$

因为(*)式两边都是 $n-1$ 次的,所以该等式必定对 x 的所有值都成立. 特别地,对 $n\geqslant1$,有

$$P_{n-1}(n)=P_n(n+1)-P_n(n).$$

因此,

$$\begin{aligned}P_n(n+1)&=P_{n-1}(n)+P_n(n)\\&=P_{n-1}(n)+2^n\\&=P_{n-2}(n-1)+2^{n-1}+2^n\\&\ \ \vdots\\&=P_0(1)+2+2^2+\cdots+2^n\\&=1+2+2^2+\cdots+2^n\\&=2^{n+1}-1.\end{aligned}$$

【习题】 将 2^k 改为 3^k 后,再做一次该问题.

问题 140 (数学归纳法)当 $n=1$ 时结果显然成立. 当 $n=2$ 时,我们要证明 $2(1+x_1x_2)\geqslant(1+x_1)(1+x_2)$.

这等价于 $(1-x_1)(1-x_2)\geqslant0$,它当然成立(当且仅当 x_1 或 x_2 等于 1 时等号成立).

假设结论对小于等于 $k(\geqslant2)$ 的所有 n 都成立,且等号在所述的条件下成立,那么对给定的 $0\leqslant x_i\leqslant1,i=1,2,\cdots,k+1$,利用 $n=2$ 的结果及 $n=k$ 时的假设,有

$$\begin{aligned}&2^k(1+x_1x_2\cdots x_kx_{k+1})\\&=2^{k-1}[2(1+\overbrace{x_1x_2\cdots x_k}x_{k+1})]\\&\geqslant2^{k-1}(1+x_1x_2\cdots x_k)(1+x_{k+1})\\&\geqslant(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}).\end{aligned}$$

如果出现等号,则 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 中至少有 $k-1$ 个量是 1. 如果上述这些量中仅有 $k-1$ 个是 1,那么 x_{k+1} 必须也等于 1.

问题 141 如果你参赌,那么你输的比赢的要多. 3 张扑克牌的所有可能的组合数是 $\frac{52\times51\times50}{1\times2\times3}=22100$. 点数牌的所有组合数仅为 $\frac{40\times39\times38}{1\times2\times3}=9880$. 所以,你拿到 3 张点数牌的机会是 $\frac{9880}{22100}=\frac{38}{85}$.

问题 142 将四个等式相乘得

$$xyzw=abcd\lambda,$$

其中 λ 是多项式 t^7-1 的根. 因此

$$x=\frac{(abcd\lambda)^2}{a^7},y=\frac{(abcd\lambda)^2}{b^7},$$

$$z=\frac{(abcd\lambda)^2}{c^7},w=\frac{(abcd\lambda)^2}{d^7}.$$

有一次我在一个旧书摊上随手拿起一本凯西(Casey)的《近世几何学初编》(*Sequel to Euclid*),发现在内封夹了一张蓝边框标签,就是医生贴在药瓶上的那种,上面写道:"有毒——每日三次。"

F. Bowman, *Mathematical Gazette*, 19 (1935): 273

问题 143 设 c 是该立体形上的最长的弦，那么该立体形的每个包含 c 的截面一定是以 c 为直径的圆. 因此，该立体形就是一个以 c 为轴的回转体，于是它是一个球体.

问题 144 没有限制条件的硬币的堆法总数是 $n!$. 而使两枚特殊的硬币相邻的堆法总数等于 $2(n-1)!$.（乘以因数 2 是因为这两枚硬币的顺序可以颠倒.）因此使这两枚硬币保持分离的排列数就是

$$n!-2(n-1)!=(n-2)(n-1)!.$$

如果我们想区分硬币翻转的情况，这个数字将是 $2^n(n-2)(n-1)!$.

问题 145 为了对问题中所提出的情形有一些了解，可以先考虑这个变圆是一条直线的退化情况. 这条直线应该是这两圆的公切线，它使得这两圆或者在该直线的同一侧，或者在它的两侧. 于是，我们可以预计该固定点是公切线的交点. 另外，由对称性，我们可以预计这些点落在这两个圆的中心线上.

情形 1a：该圆与两圆外切.

设 B、C 是这两个固定的、不相交的圆的圆心（如图 116 所示），设以 A 为圆心的圆与它们外切，切点分别为 Q 和 P. 那么 AQB 共线，APC 共线，且 $\overline{AQ}=\overline{AP}$.

设 QP 与 BC 交于 R，与以 C 为圆心的圆交于点 S，那么

$$\angle BQR=\angle AQP=\angle APQ=\angle CPS=\angle CSP,$$

因此 $\triangle RQB$ 与 $\triangle RSC$ 相似，且 $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}=\frac{\overline{QB}}{\overline{SC}}$ 为常数，从而点 R 与相切圆无关.

情形 1b：该圆与两圆内切.

设 A、B、C 是三个圆的圆心（如图 117 所示），我们仍有 $\overline{AQ}=\overline{AP}$，以及 $\triangle RQB$ 与 $\triangle RSC$ 相似，从而 $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$ 为常数.

情形 2：该圆与一个圆内切，与另一个圆外切.

设 A、B、C 是三个圆的圆心，使得中心为 A 的变圆与中心为 B 的圆外切，而与中心为 C 的圆内切（如图 118 所示）. 因为 $\overline{AQ}=\overline{AP}$，

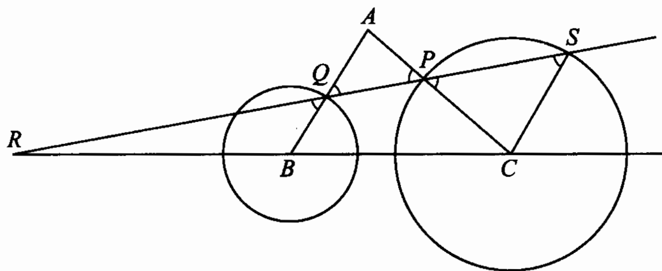


图 116

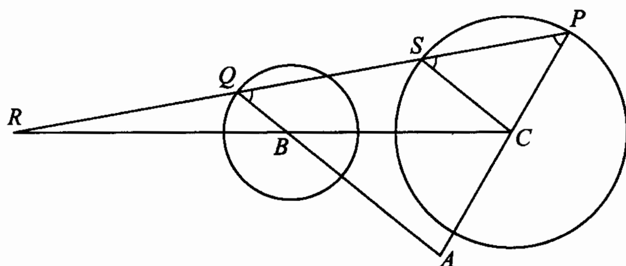


图 117

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

$$\angle APQ=\angle AQP=\angle BQS=\angle BSQ,$$

所以$\triangle R'BS$与$\triangle R'CP$相似，因此$\dfrac{\overline{R'B}}{\overline{R'C}}=\dfrac{\overline{BS}}{\overline{CP}}$是常数. 于是$R'$是(另一个)固定点.

【习题】 (1) 验证在情形1a和1b中的点R是两个圆在同一边的公切线的交点，而在情形2中的点R'则是另两条公切线的交点；

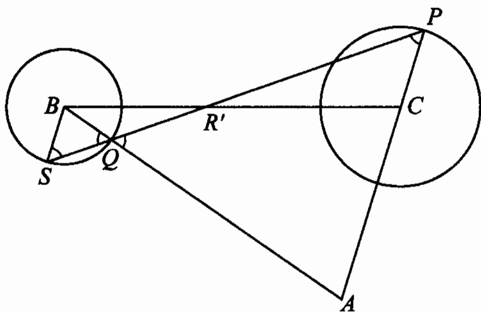


图118

(2) 如果两个圆大小相同(见图119(a))，情况会怎样？

(3) 如果两个圆相套(见图119(b))，情况会怎样？

(4) 如果两个圆相交(见图119(c))，情况会怎样？

【评论】 由梅尼劳斯定理的逆定理可得相同的结论. 参见图116(情形1a)，我们有：如果在三角形的边CB、BA、AC所在直线上分别取点R、Q、P，使得

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}=-1,$$

那么R、P、Q共线. 设r、r_1、r_2分别是中心为A、B、C的圆的半径，则有

$$\frac{r}{r_1}\cdot\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}\cdot\frac{r_2}{r}=-1.$$

于是，只要在BC上取点R，使得$r_2\,\overline{BR}=-r_1\,\overline{RC}$，那么$R$就是固定点. 其他情况可进行类似分析.

问题146 解法一：由柯西不等式(参见工具箱D4)得

$$\begin{aligned}n^2&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S-x_i}{S}\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-x_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_i}{S}\right)\right]\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-x_i}\right)\left(n-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{S}\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-x_i}\right)(n-1),\end{aligned}$$

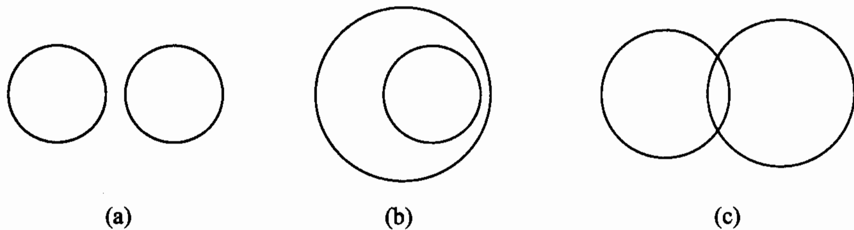


图119

“我只学正课，”素甲鱼叹了一声说，“开始当然先学‘毒’和‘泻’，然后我们就学各门算术：假发、剪发、丑法、厨法。”

刘易斯·卡罗尔，《爱丽丝漫游奇境记》

当且仅当$\sqrt{\frac{S}{S-x_i}}$是$\sqrt{\frac{S-x_i}{S}}$的常数倍，即当$\frac{S}{S-x_i}$是常数时等号成立.

解法二：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数时，由调和-算术平均值不等式可得

$$\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$$
$$=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$
$$\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

当且仅当所有 a_i 均相等时等号成立. 令 $a_i=\frac{S}{S-x_i}$，那么$\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}=n-1$. 结果立得.

问题 147 用 $P(a,b,c)$记该表达式. 因为 $P(a,a,c)=0$，所以 $a-b$ 是其因式. 同理，$b-c$、$c-a$ 也都是其因式. 提取这些因式后，我们有

$$P(a,b,c)$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)\times$$
$$[abc+(a^3+b^3+c^3)+$$
$$(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)].$$

或者，更简洁地表示为

$$P(a,b,c)=(b-c)(c-a)(a-b)\times\left(abc+\sum_{\text{symm}}a^3+\sum_{\text{symm}}a^2b\right).$$

问题 148 表 2 列出了所有的可能性.

问题 149 一般规律是

$$(\underbrace{55\cdots5}_{n个5}6)^2-(\underbrace{44\cdots4}_{n个4}5)^2=\underbrace{11\cdots1}_{2n+2个1}$$

$(n=0,1,2,\cdots)$.

实际上，因为

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

所以上式的左边等于

$$(\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1})(1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}1),$$

而这两个因数相乘后就得到右边.

问题 150 所给方程组等价于下列方程组：

$$(y-a)(z-a)=a^2+r,$$
$$(z-a)(x-a)=a^2+s,$$
$$(x-a)(y-a)=a^2+t.$$

从而得

$$(x-a)(y-a)(z-a)$$
$$=\pm\sqrt{(a^2+r)(a^2+s)(a^2+t)}.$$

因此，

$$x-a=\frac{(x-a)(y-a)(z-a)}{a^2+r}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}.$$

从上式可求得 x. 同理可求出 y 和 z. (根式前面的符号必须选择适合所给方程的.)

表 2

分数	5	4	3	2	1	0	7 道题中得该分数的种数
得此分数的题目数	6	0	0	0	0	1	$7=\ 7$
	5	1	0	0	1	0	$7\times6=\ 42$
	5	0	1	1	0	0	$7\times6=\ 42$
	4	2	0	1	0	0	$C_7^4\times C_3^2=105$
	4	1	2	0	0	0	$C_7^4\times C_3^1=105$
	3	3	1	0	0	0	$C_7^3\times C_4^3=140$
	2	5	0	0	0	0	$C_7^2=\ 21$
总的可能数							462

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 151 如图 120,设 $a=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$,那么$\triangle ABC$ 的面积是$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 这一面积也是$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的面积之和. 因此

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=a\frac{\overline{PD}}{2}+a\frac{\overline{PE}}{2}+a\frac{\overline{PF}}{2}$$
$$=\frac{a(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})}{2},$$

从而得到所要的等式.

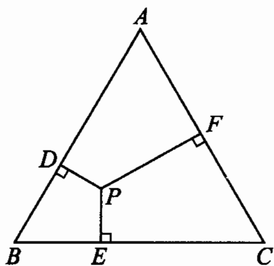


图 120

【习题】 更一般地,证明:对任何边长为 a、b、c 的三角形及任何内点 P,

$$\min(h_1,h_2,h_3)\leqslant r_1+r_2+r_3\leqslant\max(h_1,h_2,h_3),$$

其中 h_1、h_2、h_3 是边长为 a、b、c 的三条边上的高,而 r_1、r_2、r_3 是 P 到这三条边的距离.

问题 152 将方程两边三次方,得

$(13x+37)-3\sqrt[3]{13x+37}\times\sqrt[3]{13x-37}\times(\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37})-(13x-37)=2.$

因此,$24=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{13^2x^2-37^2}$. 再对两边三次方,得 $4\times12^3=13^2x^2-37^2$,从而得 $x=\pm7$. 这两个值均满足所给的方程.

问题 153 因为 $A=10^{a+1}-10^a=9\times10^a$,$B=10^b-10^{b-1}=9\times10^{b-1}$,所以 $\lg A-\lg B=a-(b-1)$. 因此$(\lg A-a)-(\lg B-b)=1$.

问题 154 设 $h=r\cos\theta$,$k=r\sin\theta$,$x-h=2ru$,$y-k=2rv$. 则这两个方程转化为

$$\begin{cases}u^2+v^2=1,\\(2u+\cos\theta)(2v+\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$$

设 $z=u+v\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=u-v\mathrm{i}$,$2u=z+\bar{z}$,$2v=\frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}}$,

$$z\bar{z}=1,\tag{1}$$

记 $\mathrm{cis}\,\theta=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则

$$z(z+\mathrm{cis}\,\theta)=\bar{z}[\bar{z}+\mathrm{cis}\,(-\theta)].\tag{2}$$

将(2)式乘以 z^2,再根据(1),得

$$z^3(z+\mathrm{cis}\,\theta)=1+z\,\mathrm{cis}\,(-\theta),$$

整理后得

$$[z^3-\mathrm{cis}\,(-\theta)](z+\mathrm{cis}\,\theta)=0.$$

根 $z=-\mathrm{cis}\,\theta$ 对应于 $x=h+2ru=h-2r\cos\theta=-h$,$y=k+2rv=k-2r\sin\theta=-k$,

1946 年在多伦多国际象棋锦标赛上,莱奥·莫泽[①]正在比赛,一人前来捣乱,弄得选手不能安心下棋。"下棋完全是浪费时间,"他说,"它与其他知识没有关系。""那么数学呢?"莫泽问道。"我研究数学好几年了,"他答道,"知道下棋与数学的四个分支都没有关系。""你指哪四个分支?"莫泽问。"你知道的,"他答道,"加、减、乘、除。"

① 莱奥·莫泽(Leo Moser,1921—1970),加拿大著名数学家,本书作者之一 W. 莫泽的哥哥。参见本书 156 页脚注。——译者

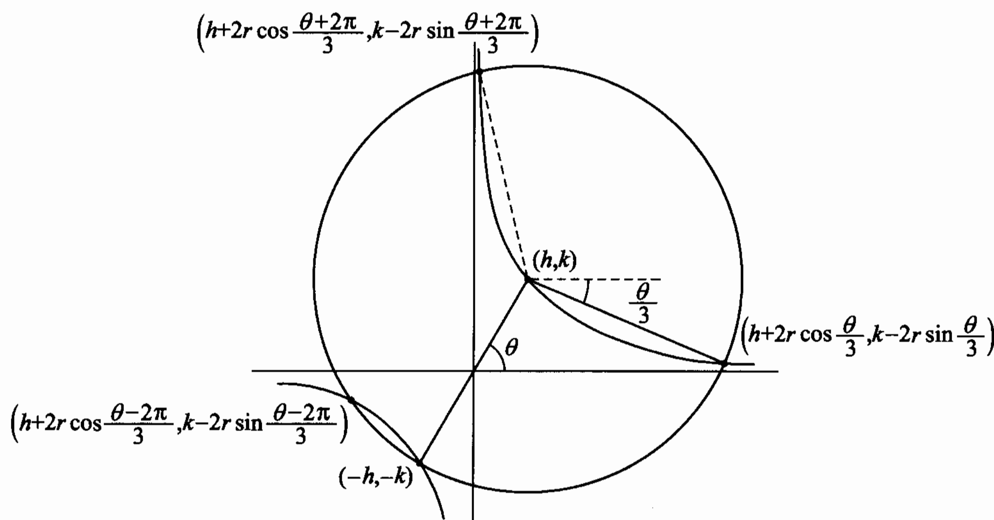


图 121

即坐标为$(-h,-k)$的点．另一因子 $z^3-\text{cis}\,(-\theta)$有三个根：

$$z=\text{cis}\,\frac{-\theta}{3},\text{即 } u=\cos\frac{\theta}{3},v=-\sin\frac{\theta}{3};$$

$$z=\text{cis}\,\frac{-\theta+2\pi}{3},$$

$$\text{即 } u=\cos\frac{\theta-2\pi}{3},v=-\sin\frac{\theta-2\pi}{3};$$

$$z=\text{cis}\,\frac{-\theta-2\pi}{3},$$

$$\text{即 } u=\cos\frac{\theta+2\pi}{3},v=-\sin\frac{\theta+2\pi}{3}.$$

这些根给出了交点

$$\left(h+2r\cos\frac{\theta}{3},k-2r\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$\left(h+2r\cos\frac{\theta-2\pi}{3},k-2r\sin\frac{\theta-2\pi}{3}\right),$$

$$\left(h+2r\cos\frac{\theta+2\pi}{3},k-2r\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

它们是可构成一个等边三角形的三个顶点．

作为几何解释，在等轴双曲线 $xy=a^2$ 上任取一点(h,k)．构造一个圆，使其中心为(h,k)，且过$(-h,-k)$．该圆与双曲线还交于另外三点，它们是一个等边三角形的顶点(如图 121 所示)．

问题 155 设

$$I_m=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}.$$

若将 I_m 展开，则所有含根式的项都会相互抵消，从而 I_m 是整数．因为$\sqrt{3}-1<1$，所以$(\sqrt{3}-1)^{2m}<1$．因此，I_m 必定是超过$(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数．

注意到

$$I_m=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m.$$

$4+2\sqrt{3}$和 $4-2\sqrt{3}$都是二次方程 $x^2=8x-4$ 的根．因此 $4+2\sqrt{3}$和 $4-2\sqrt{3}$满足所有如下形式的方程：

$$x^{m+2}=8x^{m+1}-4x^m,\ m=0,1,\cdots.$$

从而有

$$I_{m+2}=8I_{m+1}-4I_m.$$

因为 $I_1=8,I_2=56$，所以对 $m=1,2$，有 2^{m+1}整除 I_m．假设对 $m=1,2,\cdots,k$，有 2^{m+1}整除 I_m．那么 $4I_{k-1}$及 $8I_k$ 都是 2^{k+2}的倍数．因此 2^{k+2}整除 I_{k+1}．所以由数学归纳法得结论成立．

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 156 我们有

$$\left|\frac{r+2}{r+1}-\sqrt{2}\right|$$
$$=\left|\frac{(r+2)-\sqrt{2}(r+1)}{r+1}\right|$$
$$=\frac{(\sqrt{2}-1)\left|r-\sqrt{2}\right|}{1+r}$$
$$\leqslant(\sqrt{2}-1)\left|r-\sqrt{2}\right|<\left|r-\sqrt{2}\right|.$$

【习题】 如果 r 是一个逼近于(a) $\sqrt{3}$,(b) $\sqrt[3]{2}$ 的非负有理数,求总是比 r 更好的有理逼近.

问题 157 因为 $\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\cos\frac{\pi}{2}=0$,所以至少有三个 k 值 $0、\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$,使得 $\cos k\pi$ 是有理数. 假设 $\cos\theta=\frac{p}{q},q\geqslant 3,p<q$,且 q 与 p 互素. 那么

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2p^2-q^2}{q^2}.$$

最后一个分式的分子分母的公因数必定整除 $2p^2$ 及 q^2. 因为 p 与 q 仅有的公因数是 1,所以 $2p^2-q^2$ 与 q^2 的最大公因数是 1 或 2. 于是,当$\frac{2p^2-q^2}{q^2}$写成最简形式时,其分母至少是$\frac{q^2}{2}>q$,因此 $\cos 2\theta\neq\cos\theta$.

接着,我们可证明如果 $\cos\theta$ 是有理数(写成最简形式,分母大于 2),则 $\cos\theta$, $\cos 2\theta,\cos 4\theta,\cos 8\theta,\cos 16\theta,\cdots$都是有理数,且其分母组成了一个递增序列. 因此, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, $\cos 8\theta,\cdots$都不相同.

假设 $\theta=2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$,其中 u 和 v 是互素的奇数. 因为 v 是奇数,所以存在正整数 $w>|i|$,使得 v 能整除 2^w-1. (参见工具箱 B8)因此,

$$2^{2w-i+1}\theta-2^{w-i+1}\theta=\frac{2^w-1}{v}2^w u(2\pi)$$

是 2π 的整数倍. 从而 $\cos(2^{2w-i+1}\theta)=\cos(2^{w-i+1}\theta)$. 由前面所证可得,当 $\theta=2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$ 时,$\cos\theta$ 不能是分母超过 2 的有理数.

因此,仅当 $k=0、\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 时,$\cos k\pi$ 是有理数.

问题 158 我们构造一个三次多项式,使得它的根是 $x、y、z$,然后用其他的办法来求根. 这一方法是由在方程组中的三变量位置的对称性所想到的,且我们知道任何多项式的系数都是根的对称函数.

以 $x、y、z$ 为根的三次多项式是

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-pt^2+qt-r,$$

其中 $p=x+y+z,q=xy+yz+zx,r=xyz$. 因为 $p=0,6ab=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2q=-2q$,且(利用 $x、y、z$ 是该三次多项式的三个根)

$$(x^3+y^3+z^3)-p(x^2+y^2+z^2)+$$
$$q(x+y+z)-3r=0,$$

我们有 $q=-3ab,r=a^3+b^3$.

于是,$x、y、z$ 是下列三次多项式的根:

$$t^3-3abt-(a^3+b^3).$$

通过观察,我们发现 $a+b$ 是它的一个根,因此该三次式能被 $t-(a+b)$ 整除,即

$$t^3-3abt-(a^3+b^3)$$
$$=[t-(a+b)][t^2+(a+b)t+(a^2-ab+b^2)].$$

因此剩下的根是

$$\frac{1}{2}[-(a+b)\pm i\sqrt{3}(a-b)].$$

问题 159 如图 122,设 $ABCD$ 是四面体,设 P 是顶点 A 到面 BCD 的垂足. 通过比较,我们有

$$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle PBC},$$
$$S_{\triangle ACD}>S_{\triangle PCD},$$
$$S_{\triangle ADB}>S_{\triangle PDB}.$$

如果 P 落在$\triangle BCD$ 的内部,那么

$$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDB}.$$

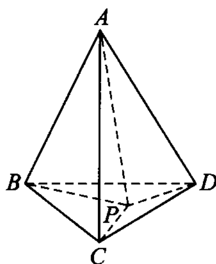


图 122

另一方面，如果 P 落在 $\triangle BCD$ 之外，那么

$$S_{\triangle BCD}<S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDB}.$$

在任何一种情况下，总有

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}>S_{\triangle BCD}.$$

对于选择其他三个面的情形可作类似推理.

该结果也等价于证明：

$$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{DA}|+|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{BA}|$$
$$\geqslant|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{BA}|,$$

由三角不等式即可得该不等式.

问题 160 要证明的不等式等价于

$$a+b\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

而这又等价于

$$a^2+2ab+b^2\leqslant2(a^2+b^2),$$

或 $(a-b)^2\geqslant0$.

【评论】 更一般地，对边长为 a、b、c 的任意三角形，有 $a+b\leqslant c\csc\dfrac{C}{2}$，其中 C 是 c 边所对的角，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

问题 161 设 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，那么 $0\leqslant\sin^5\theta\leqslant\sin^2\theta$，$0\leqslant\cos^5\theta\leqslant\cos^2\theta$，从而 $\sin^5\theta+\cos^5\theta\leqslant\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，当且仅当 θ 等于 0 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 时等号成立.

问题 162 如果 a 是该等差数列的首项，d 是其公差，那么 $p=a+(q-1)d$，$q=a+(p-1)d$. 因此，$d=-1$，$a=p+q-1$. 所以第 n 项为

$$(p+q-1)-(n-1)=p+q-n,$$

故第 $p+q$ 项为 0.

问题 163 解法一：如图 123，设 $x=\overline{CD}$，则

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2},$$

$$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

因此，

$$\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

结果得证.

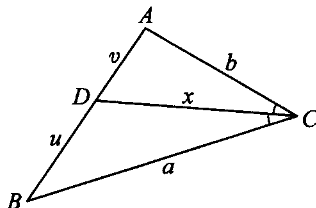


图 123

解法二：如图 123，利用 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{v}{u}$，我们有

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{v^2}{u^2}=\frac{b^2+x^2-2bx\cos\dfrac{C}{2}}{a^2+x^2-2ax\cos\dfrac{C}{2}}.$$

如果 $a\neq b$，交叉相乘，并消去 a^2b^2，得 $(b^2-a^2)x^2=2ab(b-a)x\cos\dfrac{C}{2}$，两边除以 $(b-a)x$ 即得结果. 如果 $a=b$，那么从等腰三角形的图中可直接得出

$$x=a\cos\frac{C}{2}=\frac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}.$$

解法三：如图 124，过点 B 画 DC 的平行线，并交直线 AC 于点 E. 那么

$$\overline{CE}=\overline{CB}=a,\ \overline{BE}=2a\cos\frac{C}{2},$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

图 124

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

于是，

$$\frac{\overline{CD}}{2a\cos\frac{C}{2}}=\frac{b}{a+b}.$$

问题 164 $(1367631)_b=1+3b+6b^2+7b^3+6b^4+3b^5+b^6=(1+b+b^2)^3$. 因此所给的数在任何大于 7 的基底下都是完全立方数.

问题 165 该不等式等价于

$$1+x+x^2+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n.$$

将其变形，得

$$(x^n+x^{-n}-2)+(x^{n-1}+n^{1-n}-2)+\cdots+(x+x^{-1}-2)\geqslant 0.$$

因为对 $t>0$，有

$$t+\frac{1}{t}-2=\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2\geqslant 0,$$

所以后一个不等式成立.

【习题】 证明：对所有 $n\geqslant 0, x\geqslant 0, x\neq 1$，所给不等式均成立.

问题 166 解法一：如果 a 是首项，d 是公差，

$$q=a+(p-1)d,\quad r=a+(q-1)d,$$
$$p=a+(r-1)d.$$

消去 a 和 d，得

$$q(q-r)+r(r-p)+p(p-q)=0.$$

因此，$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2=0$，从而 $p=q=r$，所求的差是 0.

解法二：除了常数数列，等差数列要么持续递增，要么持续递减. 对于前一情形，如果 $p\leqslant q\leqslant r$，那么 $q\leqslant r\leqslant p$，因此 $p=q=r$. 后一情形同样导出 $p=q=r$，因此必然有所求的差是 0.

问题 167 从以下的讨论中可以看出所要求的构造是存在的. 在图 125 中所要构造的圆是 $PQBA$，O 是已知圆 Γ 的圆心，PQ 是直径. 所要求的圆的中心 T 在 PQ 和 AB 的垂直平分线 OT 与 ST 的交点上.

图 125

设 $\overline{OP}=d$，$\overline{AS}=c$，$\overline{OS}=k$，$\angle OST=\alpha$，设 r 是所要求的圆的半径，即 $\overline{AT}=\overline{BT}=\overline{PT}=\overline{QT}=r$. c、d、k、α 是已知的，而 r 是未知的. 因为 $\overline{ST}=\sqrt{r^2-c^2}$，$\overline{OT}=\sqrt{r^2-d^2}$，将余弦定理应用于△$OST$ 得：

$$r^2-d^2=r^2-c^2+k^2-2k\sqrt{r^2-c^2}\cos\alpha,$$

或

$$\sqrt{r^2-c^2}=\frac{k^2+d^2-c^2}{2k\cos\alpha}.$$

有一位老头他到处求教：
"请告诉我二加二到底是多少？
我想了又想，算了又算，
好像是四但又不太可靠，
因为我怕这个数实在太小。"

我们可以构造一个矩形,使得它的面积为 $k^2+d^2-c^2$,一边长为 $2k\cos\alpha$,则其相邻边的长为 $\sqrt{r^2-c^2}=\overline{ST}$. 因此,$T$ 的位置就被确定了.

【说明】 进一步的推广,参见 *Crux Mathematicorum* 7 (1981):207,问题 562.

问题 168 解法一:设 $x=t^3$. 则由所给的多项式方程,我们有

$$-(x+c)=\sqrt[3]{x}(b+a\sqrt[3]{x}).$$

将等式两边三次方,得

$$-(x+c)^3=x[b^3+a^3x+3ab\sqrt[3]{x}(b+a\sqrt[3]{x})],$$

或

$$-(x+c)^3=x[b^3+a^3x-3ab(x+c)].$$

解法二:如果 m、n、p 是所给多项式方程的根,我们有 $m+n+p=-a$, $mn+mp+np=b$, $mnp=-c$. 所要求的方程的根为 m^3、n^3、p^3. 所以

$$\begin{aligned}&m^3+n^3+p^3\\=&(m+n+p)^3-\\&3(m+n+p)(mn+mp+np)+3mnp\\=&-a^3+3ab-3c.\\&m^3n^3+m^3p^3+n^3p^3\\=&3m^2n^2p^2+(mn+mp+np)^3-\\&3(m+n+p)(mn+mp+np)mnp\\=&3c^2+b^3-3abc,\\&m^3n^3p^3=-c^3.\end{aligned}$$

因此,我们要求的方程是

$$x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(3c^2+b^3-3abc)x+c^3=0.$$

问题 169 我们发现,不等式

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

等价于 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0$,而这个不等式显然正确. 对左边的每项应用这一点就得到了所要的结论.

【习题】 更一般地,证明:如果

$$S_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$
$$S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad a_i>0,$$

那么

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_2-a_i^2}{S_1-a_i}\geqslant S_1.$$

问题 170 一个首位是 6 的正整数具有形式 $6\times10^n+m$,其中 $0\leqslant m\leqslant10^n-1$.

(1) 此时的条件是 $25m=6\times10^n+m$,化简后得 $m=2^{n-2}\times5^n$. 于是,这样的数具有如下形式:

$$6\times10^n+2^{n-2}\times5^n=625\times10^{n-2},$$

即 625,6250,62500,….

(2) 假设第一位数字是 d,则 $35m=d\times10^n+m$,或 $17m=d\times2^{n-1}\times5^n$. 因为 $1\leqslant d\leqslant9$,所以这是不可能的.

问题 171 设该多边形的内角是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,对应的外角是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,则对 $i=1,2,\cdots,n$, $\alpha_i+\beta_i=180°$. 如果 $n\geqslant3$,且 $\alpha_n=\alpha_{n-1}=\alpha_{n-2}=60°$,那么 $\beta_n=\beta_{n-1}=\beta_{n-2}=120°$,所以 $\beta_n+\beta_{n-1}+\beta_{n-2}=360°$. 然而,我们知道一个凸多边形的所有外角之和是 360°,从而有 $n=3$.

如果一个凸多边形有 4 个内角是直角,那么这个多边形必定是矩形. 更一般地,如果一个凸多边形有 r 个内角的和为 $(r-2)180°$,那么这个多边形必定是具有给定的那些角的 r 边形.

问题 172 因为 $1+y^4\geqslant2y^2$, $1+z^4\geqslant2z^2$, $1+x^4\geqslant2x^2$(当且仅当 $x^2=y^2=z^2=1$ 时等号成立),所以只要证明

$$x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2\geqslant3x^2y^2z^2.$$

而这一不等式可直接由算术-几何平均值不等式得到. 当且仅当 $x=y=z=0$ 或 $x^2=y^2=z^2=1$ 时等号成立.

问题 173 在 1 到 10^{30} 之间(包括端点)的 k

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

次幂的个数等于1到$10^{\frac{30}{k}}$之间(包括端点)的整数的个数,其中$k=1,2,\cdots$. 由容斥原理,可得答案是

$$10^{30}-10^{\frac{30}{2}}-10^{\frac{30}{3}}-10^{\frac{30}{5}}+10^{\frac{30}{2\times3}}+10^{\frac{30}{2\times5}}+10^{\frac{30}{3\times5}}-10^{\frac{30}{2\times3\times5}}$$
$$=10^{30}-10^{15}-10^{10}-10^{6}+10^{5}+10^{3}+10^{2}-10.$$

问题 174 $16^n+10n-1$的前几个值是25, 275, 4125, …. 推测答案应该是25,我们试着通过处理,从中分离出25这个因数来. 对于每个正整数n,

$$16^n+10n-1=(1+15)^n+10n-1$$
$$=1+15n+15^2k+10n-1$$
$$=25(n+9k),$$

其中k是某个整数(因为$(1+15)^n$的二项式展开式中,从第三项起都包含15^2这个因数). 从而得最大公因数是25.

问题 175 解法一(数学归纳法):当$n=1$、$n=2$时,结论成立. 假设对$n=k\geqslant2$结论成立. 那么

$$a_1a_2\cdots a_k\geqslant1-k+a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

两边乘a_{k+1},得

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}$$
$$\geqslant a_{k+1}(1-k+a_1+a_2+\cdots+a_k)$$
$$\geqslant a_{k+1}+(1-k+a_1+a_2+\cdots+a_k)-1$$

(由$n=2$的情形可得)

$$=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}-k.$$

当且仅当$a_{k+1}=1$且$a_1,a_2,\cdots,a_k$中至多只有一个不等于1,或者$1-k+a_1+a_2+\cdots+a_k=1$时等号成立. 在任一情形下,条件都是除了至多可以有一个例外,所有的a_i都等于1.

解法二:设$a_i=1+t_i(i=1,2,\cdots,n)$. 那么$t_i\geqslant0$,且所要证明的不等式是

$$n+(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$$
$$\geqslant1+n+t_1+\cdots+t_n.$$

而

$$(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$$
$$=1+t_1+t_2+\cdots+t_n+p,$$

其中$p=\prod_i(1+t_i)-1-\sum_it_i$是非负数,当且仅当至少有$n-1$个$t_i$是0时它等于0.

问题 176 由剩余定理,我们有

$$p(a)=a,\quad p(b)=b,\quad p(c)=c.$$

设a、b、c互不相同,我们记

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+r(x),$$

其中$r(x)$是次数最多是2的多项式. 则必有

$$r(a)=a,\quad r(b)=b,\quad r(c)=c.$$

因此多项式$r(x)-x$的次数最多是2,且有根a、b、c,所以它一定是零多项式. 于是该余式是x.

【习题】 如果a_1、a_2、…、a_n互不相同,且用$x-a_i$去除$p(x)$所得的余数为$a_i(i=1,2,\cdots,n)$,证明:存在多项式$q(x)$,使$p(x)=q(x)\prod(x-a_i)+x$.

问题 177 用$1-x$代替x得

$$(1-x)^2F(1-x)+F(x)=2(1-x)-(1-x)^4.$$

将此方程与原方程联立,解该方程组,得

$$F(x)=1-x^2.$$

问题 178 关于模4来考虑该方程,我们可以发现在集合$\{a,b,c\}$中不可能恰有1个、2个或3个奇数. 因此这三个数必定全是偶数,即存在整数a_1、b_1、c_1,使得$a=2a_1$,$b=2b_1$,$c=2c_1$,从而$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4a_1^2b_1^2\equiv0\pmod 4$. 但是我们可以发现$a_1$、$b_1$、$c_1$也必须全是偶数,故存在整数$a_2$、$b_2$、$c_2$,使得$a_1=2a_2$,$b_1=2b_2$,$c_1=2c_2$. 我们可持续这一论证,说明这些新数仍是偶数,如此等等. 但是这一过程不可能无限持续下去. 因此该方程不存在正整数解.

【说明】 对它的推广,参见M. S. 克拉姆金所著的《美国数学奥林匹克1972—1986》,美国数学协会,1988,pp. 32—33.

问题 179 解法一：因为 $a_{n+2}-1=a_1a_2\cdots a_{n+1}$，所以 $a_{n+1}=\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}-1}$. 因此

$$\frac{1}{a_{n+2}-1}=\frac{1}{(a_{n+1}-1)a_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_{n+1}},\ n=1,2,3,\cdots.$$

所以

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_{n+2}-1}\right)$$
$$=1+\frac{1}{a_2-1}=2.$$

解法二：由数学归纳法，可以证明，对每个正整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=2-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n},$$

从而得所要结果.

问题 180 如图 126，从 B 点出发，向接近 A 点的方向画两条直线段 l_1 和 l_2 并延伸. 画直线段 PA、PC 和 PD，然后确定出 AE、AD 与 PC 的交点 G 和 F. 考虑 $\triangle GHE$ 和 $\triangle FID$. 由德萨格定理（参见工具箱 E37），HG 和 IF 会交于 AB 上近 A 处的一点 J. 经过这样逐步靠近，最终就能画出 AB 了.

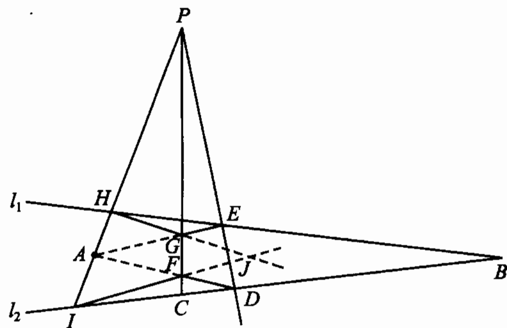


图 126

问题 181 由这两个圆的圆心及公共弦的中点（或相应的切点）所确定的平面也包含两条与这两个圆所在平面垂直并通过这两个圆心的直线. 然而，一条垂直于圆所在平面且过其圆心的直线是到其圆周的距离相等的点的轨迹. 因此，这两条直线的交点到这两个圆的圆周上的点都是等距的. 特别地，这些圆周上的点也包括该公共弦的端点（或切点）. 这个点就是包含这两个圆的球的中心.

问题 182 假设存在不同的素数 p、q、r，其立方根在某个等差数列中，即对实数 a 和 d，整数 b 和 c，有

$$\sqrt[3]{p}=a,\ \sqrt[3]{q}=a+bd,\ \sqrt[3]{r}=a+cd.$$

因为 $d=\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{b}=\frac{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}{c}$，所以我们有

$$u\sqrt[3]{p}=v\sqrt[3]{q}+w\sqrt[3]{r},$$

其中 $u=c-b$，$v=c$，$w=-b$ 是整数. 将该方程两边取立方，得

$$u^3p=v^3q+w^3r+3vw\sqrt[3]{qr}(v\sqrt[3]{q}+w\sqrt[3]{r})$$
$$=v^3q+w^3r+3uvw\sqrt[3]{pqr}.$$

但是由此将推导出 $\sqrt[3]{pqr}$ $\left(即 \frac{u^3p-v^3q-w^3r}{3uvw}\right)$ 是有理数，这是不成立的. 因此，满足所述性质的素数 p、q、r 是不存在的.

【习题】 若将问题中的“立方根”换成“n 次方根（$n\geqslant 2$）”，或将“等差数列”换成“等比数列”，证明原结论仍然成立.

问题 183 设 ED 是垂直于平面 BOC 的直线，那么 ED 平行于 AO，因此落在平面 AOD 上. 于是，BC 既垂直于 AD 又垂直于 ED，因此垂直于平面 AOD，故也垂直于该平面上每条直线. 特别地，BC 垂直于 OD.

问题 184 解法一：如图 127，设 A 是三维空间中的原点，设 $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{y}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. 注意到一个四边形当且仅当它的两条对角线相互平分时才是平行四边形.

情形 1：$\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ 线性无关. 假设四个顶点 P、Q、R、S 分别是 $t\vec{x}$、$(1-u)\vec{x}+u\vec{y}$、$(1-$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

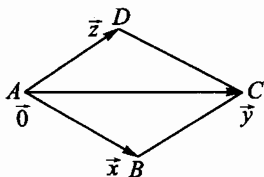


图 127

$v)\vec{y}+v\vec{z}$、$w\vec{z}$，其中 $0\leqslant t、u、v、w\leqslant 1$，那么当且仅当

$$\frac{1}{2}[t\vec{x}+(1-v)\vec{y}+v\vec{z}]$$

$$=\frac{1}{2}[(1-u)\vec{x}+u\vec{y}+w\vec{z}]$$

时，$PQRS$ 是平行四边形.

因为 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 线性无关，所以 $u=1-t$，$v=t$，$w=t$，其中心的轨迹是

$$\left\{\frac{1}{2}[t\vec{x}+(1-t)\vec{y}+t\vec{z}]:0\leqslant t\leqslant 1\right\}$$

$$=\left\{t\left(\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2}\right)+(1-t)\frac{\vec{y}}{2}:0\leqslant t\leqslant 1\right\},$$

即联结两对角线中点的直线段.

情形 2：$\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ 线性相关(即 A、B、C、D 四点共面). 此时，存在实数 r 和 s，使得 $\vec{y}=r\vec{x}+s\vec{z}$，则 P、Q、R、S 分别是

$$t\vec{x},$$

$$(1-u)\vec{x}+u\vec{y}=(1-u+ur)\vec{x}+us\vec{z},$$

$$(1-v)\vec{y}+v\vec{z}=(1-v)r\vec{x}+[(1-v)s+v]\vec{z},$$

$$w\vec{z}.$$

由对角线互相平分的条件得

$$(1-u+ur)\vec{x}+(us+w)\vec{z}$$

$$=[t+(1-v)r]\vec{x}+[(1-v)s+v]\vec{z},$$

从而导出

$$1-u+ur=t+r-vr, 及\ us+w=s-vs+v.$$

如果 $r=1$，我们有 $1=t+1-v$，或 $t=v$，其中点是

$$\frac{1}{2}[\vec{x}+(us+w)\vec{z}]$$

$$=\frac{1}{2}[\vec{x}+(s-ts+t)\vec{z}]$$

$$=(1-t)\left(\frac{\vec{x}+s\vec{z}}{2}\right)+t\left(\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2}\right),$$

其中 $0\leqslant t\leqslant 1$.

如果 $s=1$，我们有 $u+w=1$，且其中点是

$$\frac{1}{2}[(1-u+ur)\vec{x}+\vec{z}]$$

$$=(1-u)\left(\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2}\right)+u\left(\frac{r\vec{x}+\vec{z}}{2}\right).$$

一般地，其中点是

$$\frac{1}{2}\{[(1-u)+ur]\vec{x}+[(1-v)s+v]\vec{z}\},$$

$$0\leqslant u,v\leqslant 1.$$

轨迹是图 128 中的阴影部分. 它是一个平行四边形，其边分别平行于向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{z}$，四个顶点是

$$\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2},\frac{\vec{x}+s\vec{z}}{2},\frac{r\vec{x}+s\vec{z}}{2},\frac{r\vec{x}+\vec{z}}{2}.$$

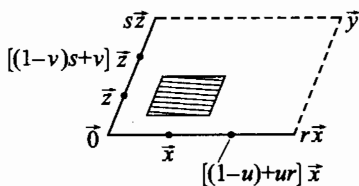


图 128

解法二：(当 A、B、C、D 不共面时)首先，观察到 $PQRS$ 是共面的，且它所在的平面或者平行于 AC，或者交 AC 于单个的点，设为 T. 在后一情形中，T 必须同时落在 PQ 和 RS 上，这就与它们平行的事实相矛盾. 因此，AC 平行于 $PQRS$. 因为 PQ 落在平面 ABC 上，所以 PQ 和 AC 不能是斜的. 因此 $AC/\!/PQ/\!/RS$. 类似地，有 $BD/\!/PS/\!/QR$，见图 129.

设 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$，那么 $\overrightarrow{AS}=k\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{BC}$，且 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{DC}$.

$PQRS$ 的中心 M 确定如下：

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS})$$

$$=\frac{1}{4}[(1+k)\overrightarrow{AB}+(1+k)\overrightarrow{AD}+$$

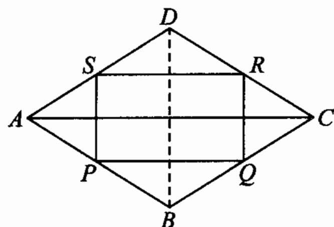


图 129

$$(1-k)\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{DC}]$$

$$=(1-k)\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}{4}+\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}{4}\right)+k\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}\right)$$

$$=(1-k)2\frac{\overrightarrow{AC}}{4}+k\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}\right)$$

$$=(1-k)\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+k\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}.$$

k 值可取遍 0 到 1 之间的所有数(包括两端),所以$\overrightarrow{AM}$取遍联结对角线 AC 与 BD 的中点的直线段.

问题 185 解法一:如图 130,由$\triangle OKM\backsim\triangle PEM$,得

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{PM}}.$$

因为$\overline{OK}=\overline{OA}$,$\overline{PE}=\overline{PC}$,我们有

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PM}}.\qquad(1)$$

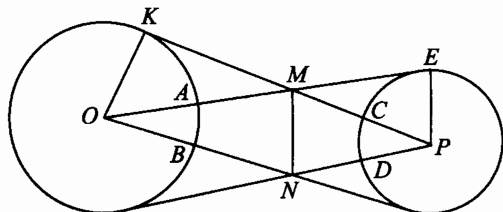


图 130

由$\triangle OAB\backsim\triangle OMN$,以及$\triangle PCD\backsim\triangle PMN$,我们分别有

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}},\ \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}.\qquad(2)$$

由(1)和(2)可得:$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}$,所以$\overline{AB}=\overline{CD}$.

解法二:设 $O(0,0)$,$P(d,0)$,设以 O 为中心的圆和以 P 为中心的圆的半径分别为 r 和 R. 设 $y=mx$ 是 OE 的方程. 从 P 到 OE 的距离为 $R=\frac{|md|}{\sqrt{1+m^2}}$. 于是,$\frac{m^2}{1+m^2}=\frac{R^2}{d^2}$. 直线 $y=mx$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 的交点坐标由方程 $y^2(1+m^2)=m^2r^2\left(\text{即 } y^2=\frac{R^2r^2}{d^2}\right)$给出. 因此,$AB$ 的长度是$\frac{2Rr}{d}$. 因为$\overline{AB}$的表达式关于两圆的半径是对称的,所以$\overline{CD}$一定由相同的量表示. 因此,$\overline{AB}=\overline{CD}$.

问题 186 先假设 $PQ/\!/AC$. 因为 A、C、R、S 和 A、P、Q、C 确定了两个平面,它们交于 AC. PQ 和 RS 若相交,则必交于 AC 上的一点,与假设矛盾. 于是得 $PQ/\!/SR$. 因此 $SR/\!/AC$. 于是,显然 $P'Q'/\!/A'C'$ 且 $S'R'/\!/A'C'$,因而 $P'Q'/\!/S'R'$,P'、Q'、R'、S' 共面. 我们现在再假设 PQ 和 SR 都不平行于 AC. 那么 PQ 和 SR 都交 AC 于 T,T 也是直线 AC 的延长线与平面 $PQRS$ 的交点(如图 131). 由梅尼劳斯定理(参见工具箱 E20),

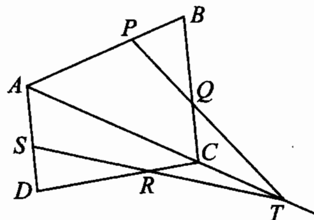


图 131

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}}=-\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{BP}}=-\frac{\overline{RD}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{DS}}.$$

因为图形 $APBQC$ 与 $A'P'B'Q'C'$ 全等,

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

所以 $P'Q'$ 必交 $A'C'$ 于 T'，使得

$$\frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'C'}}=-\frac{\overline{Q'B'}}{\overline{C'Q'}}\cdot\frac{\overline{P'A'}}{\overline{B'P'}}=-\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{BP}}.$$

类似地，$S'R'$ 必交 $A'C'$ 于 T''，使得

$$\frac{\overline{A'T''}}{\overline{T''C'}}=-\frac{\overline{R'D'}}{\overline{C'R'}}\cdot\frac{\overline{S'A'}}{\overline{D'S'}}=-\frac{\overline{RD}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{DS}}$$

$$=-\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'C'}}.$$

因此 $T'=T''$，于是 $P'Q'$ 与 $S'R'$ 交于 T'. 因此 P'、Q'、R'、S' 共面.

问题 187 由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

因此(a)可简化为

$$\sin A+\sin B=k\sin C=k\sin(\pi-A-B)$$
$$=k\sin(A+B),$$

或

$$2k\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

因为 $0<\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以我们可消去 $2\sin\frac{A+B}{2}$，得

$$k\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A-B}{2}. \qquad (1)$$

由(b)，

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=k\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},$$

从而

$$\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$=k\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

因此，

$$\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$
$$=\frac{1}{2}k\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right).$$

于是，

$$2\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=k\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right). \qquad (2)$$

联立(1)式和(2)式，解得 $k^2=2+k$ 或

$$(k-2)(k+1)=0.$$

因为 $k=-1$ 是不允许的，所以 $k=2$. 例如当 $k=2$ 时，(a)和(b)对等边三角形成立.

问题 188 解法一：如图 132，假设 A、B、C、D 不共面，考虑四面体 $ABCD$. 因为一个三面角的任何两个面角之和大于第三个面角，所以有

$$\angle CAB+\angle CAD>\angle DAB=90^\circ,$$
$$\angle DBC+\angle DBA>\angle ABC=90^\circ,$$
$$\angle ACD+\angle ACB>\angle BCD=90^\circ,$$
$$\angle BDA+\angle BDC>\angle CDA=90^\circ.$$

将这四个不等式相加，由 $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA=360^\circ$，得四面体的四个三角形面的所有面角之和超过 $720^\circ=4(180^\circ)$. 因为这显然不成立，所以 A、B、C、D 必共面.

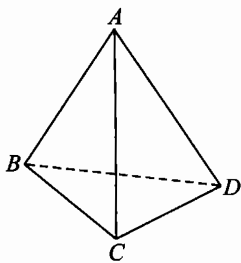


图 132

解法二：点 D 同时落在过 A 且垂直于 AB 的平面和过 C 且垂直于 BC 的平面上. 因此 D 落在这两个平面的交线 l 上. 因为两平面的法向量 AB 和 BC 垂直，所以这两平面本身垂直，直线 l 垂直于平面 ABC.

假设 l 交平面 ABC 于 D'，那么 $ABCD'$ 是个平面矩形. 于是 AC 所对的是在顶点 D

和 D' 处的直角，从而 D 和 D' 均落在 l 与以 AC 为直径的球的交点上. 但是 l 垂直于该球(联结 D 与 AC 的中点)的半径，因此与该球相切. 于是 D 与 D' 相等，从而 A、B、C、D 共面.

解法三：确定解法二中的 D'. 我们有

$$\begin{aligned}&\overline{AD}^2+\overline{DC}^2\\=&\overline{AC}^2=\overline{AD'}^2+\overline{D'C}^2\\=&(\overline{AD}^2+\overline{DD'}^2)+(\overline{DD'}^2+\overline{DC}^2)\\=&\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+2\,\overline{DD'}^2\end{aligned}$$

(由毕达哥拉斯定理).

因此 $\overline{DD'}=0$，$D=D'$.

解法四：利用几何三维坐标. 设 B 在原点，A 在 x 轴上，C 在 y 轴上，则有非零数 a 和 c，使得 $A=(a,0,0)$，$B=(0,0,0)$，$C=(0,c,0)$. 假设 $D=(x,y,z)$.

$$\begin{aligned}\angle BAD=90^\circ\\ &\Rightarrow 0=(a,0,0)\cdot(x-a,y,z)\\ &\quad=a(x-a)\\ &\Rightarrow x=a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle BCD=90^\circ\\ &\Rightarrow 0=(0,c,0)\cdot(x,y-c,z)\\ &\quad=c(y-c)\\ &\Rightarrow y=c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle ADC=90^\circ\\ &\Rightarrow 0=(x-a,y,z)\cdot(x,y-c,z)\\ &\quad=x(x-a)+y(y-c)+z^2\\ &\quad=z^2.\end{aligned}$$

因此，$D=(a,c,0)$，结论得证.

问题 189 因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$，我们必须证明

$$2(\sin A-\sin B)=1,$$

即 $2(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)=2(\sin 126^\circ-\sin 18^\circ)=1$.

令 $\theta=72^\circ$，则 $\cos 3\theta=\cos(360^\circ-2\theta)=\cos 2\theta$. 因为 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，且 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，所以 $x=\cos\theta$ 是满足方程

$$4x^3-2x^2-3x+1=0$$

的正数. 整理得

$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

因为 $x\neq 1$，所以 $4x^2+2x-1=0$，从而

$$\cos 72^\circ=x=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

于是，$2(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)=1$，满足要求.

问题 190 如图 133，设 P 是 AB 的延长线与 DC 的延长线的交点. 注意到 $ABCD$ 是共圆的，我们有

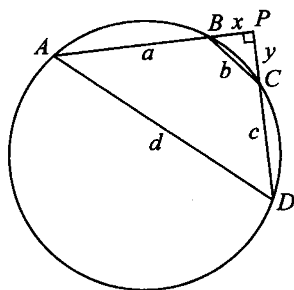


图 133

$$\angle PDA=180^\circ-\angle ABC=\angle PBC,$$
$$\angle PAD=180^\circ-\angle BCD=\angle PCB.$$

因此 $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$. 于是，如果设 $y=\overline{PC}$，$x=\overline{PB}$，则

$$\frac{y}{b}=\frac{a+x}{d},\frac{x}{b}=\frac{c+y}{d}.$$

解此关于 x 和 y 的方程组，得

$$(d^2-b^2)y=b(ad+bc),$$

以及

$$(d^2-b^2)x=b(ab+cd).$$

因为 $x^2+y^2=b^2$，所以所要的等式成立.

问题 191 如图 134，因为 PS 与 QR 相交，所以 P、S、Q、R 共面. 则或者 PQ 与 RS 相交，或者 $PQ/\!/RS$. 假设 PQ 与 RS 交于点 T. 因为 T 落在 PQ 的延长线上，所以 T 落

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

在平面 ABC 上. 类似地,有 T 落在平面 ACD 上. 因此,T 落在这两个平面的交线即 AC 的延长线上. 于是,在这种情况下,PQ、RS 及 AC 共点.

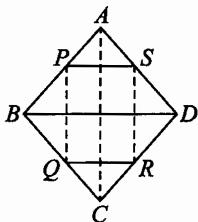


图 134

假设 PQ 与 RS 的延长线不相交,那么 $PQ /\!/ RS$. 我们证明 AC 的延长线与 $PQRS$ 所在的平面不相交. 反之,假设它们交于点 V. V 同时落在 $PQRS$ 和 ABC 两个平面上,因此 V 落在它们的交线 PQ 的延长线上. 类似地,有 V 落在 RS 的延长线上,这就导致矛盾! 于是 AC 平行于 $PQRS$. 因此 AC 和 PQ 不相交. 因为 AC 和 PQ 共面,所以它们必平行. 于是 $PQ /\!/ RS /\!/ AC$.

问题 192 设 P 是 C 和 D 到 AB 的垂线的垂足,见图 135,则 $\angle CPD=\theta$. 取 AC 的长为 1,那么 $CP=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 设 $\angle CAD=\alpha$. 由余弦定理得,

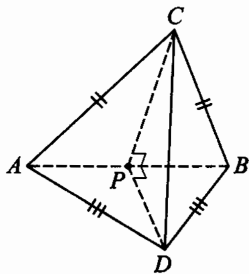


图 135

$$\overline{CD}^2=1+1-2\cos\alpha,$$

和

$$\overline{CD}^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\cos\theta.$$

因此 $2\cos\alpha=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos\theta$,或

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1+3\cos\theta}{4}\right).$$

问题 193 由余弦定理易得 $\cos A=\frac{3}{4}$, $\cos C=\frac{1}{8}$. 因此

$$\cos C=\frac{1}{8}=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1$$
$$=2\cos^2 A-1=\cos 2A.$$

因为 $2A$ 和 C 都落在 0 和 π 之间,所以 $2A=C$.

问题 194 如图 136,在球上任意画个圆,设其中心是 P,从该圆上任意两点 A、B,构造相等的弧交于 M 和 N,则过 PMN 的圆是一个大圆. (P、M、N 到 A 点与到 B 点的距离相等,因此它们落在 AB 的垂直平分面上. 这一平面通过球心,且与球面的交是个大圆.)用圆规将弦距 PM、MN 和 NP 转移到平面,并构造(作为转移到平面上的)$\triangle PMN$ 的外接圆. 这个外接圆的半径就是该球的半径.

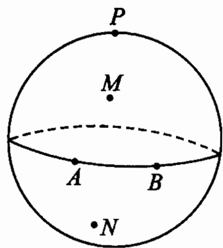


图 136

问题 195 如果我们有 n 个点 $A,B,C,\cdots$,那么等式左边可解释成由这 n 个点组成的线段对的个数. 现在加一个额外的点 Q,并考虑每四个点的组合. 组合 Q、A、B、C(含 Q 的组

合)对应三对原来集合中的线段对,即 AB, AC;AB, BC;BC, AC. 组合 A、B、C、D(不含 Q 的组合)也对应另三对原线段对,即 AB, CD;AC, BD;AD, BC. 因此线段对的个数等于从 $n+1$ 个点中取 4 个的方法数的 3 倍,即 $3C_{n+1}^4$.

问题 196 由欧拉公式,$E+2=F+V$,其中 E、F、V 分别表示棱数、面数及顶点数. 又因为每个面至少有三条棱,且每条棱属于两个面,故 $2E\geqslant 3F$. 类似地,因为从每个顶点出发至少有三条棱,且每条棱有两个端点,所以 $2E\geqslant 3V$.

(a) 此时,有 $14\geqslant 3F$, $14\geqslant 3V$,从而 $F\leqslant 4$, $V\leqslant 4$. 但是由这将推导出 $E+2\leqslant 8$,与 $E=7$ 矛盾!

(b) 此时,$2E=6F$,从而由欧拉公式,$3V=3E+6-3F=2E+6$,但是这与 $2E\geqslant 3V$ 矛盾.

问题 197 解法一:如图 137,由余弦定理,$1=7+7-14\cos\beta$,从而得 $\cos\beta=\frac{13}{14}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{27}}{14}$,且

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{27}}{14}$$
$$=1+\frac{11}{14}=\frac{25}{14}.$$

于是 $\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

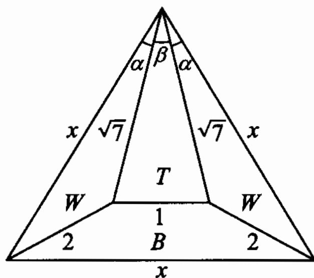


图 137

再由余弦定理,$4=7+x^2-2\sqrt{7}x\cos\alpha=7+x^2-5x$,从而 $x^2-5x+3=0$. 因为 $x>1$,所以我们有

$$x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{13}).$$

解法二:参考图 137,并使用计算三角形面积的海伦公式(参见工具箱 E44),我们可以得到三角形 T 的面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,高是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 而梯形 B 的高是 $\frac{(x-3)\sqrt{3}}{2}$,因此它的面积是 $\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{3}}{4}$. 于是

$2\times W$ 的面积

$=$大三角形的面积$-T$ 的面积$-B$ 的面积

$$=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}(x^2-2x-3)}{4}=\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

由海伦公式,

$$2\times W\text{ 的面积}=2\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{x+2-\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}+(x-2)}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}-(x-2)}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{[(x+2)^2-7][7-(x-2)^2]}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{[4x+(x^2-3)][4x-(x^2-3)]}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{22x^2-x^4-9}.$$

PDF电子书基地:http://dayo1982.400gb.com

因此，$\sqrt{3}x=\sqrt{22x^2-x^4-9}$，从而有 $x^4-19x^2+9=0$. 对应的根满足 $x^2=\frac{19+5\sqrt{13}}{2}$，所以 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

问题 198 设 $ABCD$ 是任意四边形. 因为

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$，

$$\overrightarrow{DA}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2.$$

记 a、b、c、d 为四边形的边长，如图 138 所示，则我们有

$$d^2=a^2+b^2+c^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

这等价于

$$\begin{aligned}&b^2+d^2\\=&a^2+c^2+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\=&a^2+c^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

由此推出，四边形 $ABCD$ 的对角线正交的充分必要条件是 $b^2+d^2=a^2+c^2$.

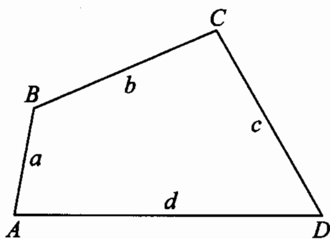


图 138

本题中，如果 a、b、c、d 是四边形$ABCD$ 的边长，a'、b'、c'、d'是四边形 $A'B'C'D'$的边长，则有 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，$d=d'$. 因此，

$$AC\perp BD\Rightarrow b^2+d^2=a^2+c^2\Rightarrow b'^2+d'^2=a'^2+c'^2\Rightarrow A'C'\perp B'D'.$$

问题 199 更一般地，我们证明如果 $P_0(x)$，$P_1(x)$，…，$P_{n-2}(x)$ $(n\geqslant 2)$ 及 $S(x)$ 是多项式，使得

$$\begin{aligned}&P_0(x^n)+xP_1(x^n)+\cdots+x^{n-2}P_{n-2}(x^n)\\=&(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)S(x),\end{aligned}$$

那么对所有 i，$x-1$ 是 $P_i(x)$的因式.

设 ω_i，$i=1,2,\cdots,n-1$ 是不等于 1 的 n 次单位复根. 因为

$$x^n-1=(x-1)(1+x+\cdots+x^{n-1}),$$

所以对所有 i，

$$1+\omega_i+\omega_i^2+\cdots+\omega_i^{n-1}=0.$$

如果我们将 ω_i 代入上面所给的算式，则对所有 i，有

$$P_0(1)+\omega_iP_1(1)+\cdots+\omega_i^{n-2}P_{n-2}(1)=0.$$

因为 $n-2$ 次多项式$\sum\limits_{k=0}^{n-2}P_k(1)x^k$ 有 $n-1$ 个不同的根 ω_i，所以它一定恒等于零. 于是，

$$P_0(1)=P_1(1)=\cdots=P_{n-2}(1)=0.$$

最后，由因子定理可知，$x-1$ 是 $P_0(x)$，$P_1(x)$，…，$P_{n-2}(x)$中每一个的因式.

问题 200 如图 139 建立空间直角坐标系，使 F 为原点，FG、FE、FB 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，取$\overline{AB}=1$，则 P、Q、R 的坐标分别为

$$P(0,c,1),Q(1,0,a),R(b,1,0),$$

其中 $0\leqslant a$、b、$c\leqslant 1$. 本问题是确定满足 $0\leqslant a$、b、$c\leqslant 1$ 的 a、b、c，使得

$$L=\sqrt{a^2+(1-b)^2+1}+\sqrt{b^2+(1-c)^2+1}+\sqrt{c^2+(1-a)^2+1}$$

最小.

由闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned}&(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{\frac{1}{2}}+(z_1^2+z_2^2+z_3^2)^{\frac{1}{2}}\\\geqslant&[(x_1+y_1+z_1)^2+(x_2+y_2+z_2)^2+(x_3+y_3+z_3)^2]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

取$(x_1,x_2,x_3)=(1,a,1-b)$，$(y_1,y_2,y_3)=(1,b,1-c)$，$(z_1,z_2,z_3)=(1,c,1-a)$，则有

$$L^2\geqslant 9+s^2+(3-s)^2=2\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2},$$

这里 $s=a+b+c$.

因为 $2\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$在 $s=\frac{3}{2}$时达到其

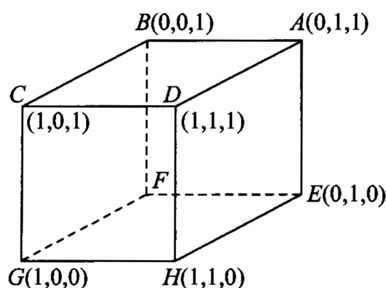


图 139

最小值，所以我们有 $L^2 \geqslant \frac{27}{2}$. 而当 $a=b=c=\frac{1}{2}$时，$s=\frac{3}{2}$，而 $L=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$. 于是最小周长是$\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

【评论】 当且仅当(x_1,x_2,x_3)，(y_1,y_2,y_3)，(z_1,z_2,z_3)成比例时，闵可夫斯基不等式等号成立. 在本题情况下，推导出 $L^2 \geqslant 9+s^2+(3-s)^2$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{2}$时等号成立.

问题 201 他无法准时上班！因为以 12 千米的时速驾车行驶 2 千米所花的时间等于以 36 千米的时速驾车行驶 6 千米所花的时间. 他在行驶前 2 千米时已花完了所有时间.

问题 202 解法一：任选一个面作为 1 月. 则共有 C_{11}^5种方法选取 5 个月份作为与 1 月的面相邻的成环形的 5 个面，而这 5 个面共有 4！种本质上不同的排法. 还有另外一个由 5 个面组成的环形，环形中的每个面都与 1 月的两个邻居相邻，选取这些面共有 C_6^5 种方法，且相对于第一个环形这些面共有 5！种本质上不同的排法. 最后，与 1 月处于对映位置的面现在已被确定了. 因此制作这样的台历的本质上不同的排法种数是

$$C_{11}^5 \cdot 4! \cdot C_6^5 \cdot 5! =\frac{11!}{5}.$$

解法二：如果所有面都是可区分的，那么共有 12！种放置月份的方法. 然而，其中的每一种安排都可以通过该十二面体到自身的空间刚体变换转换到其他不同的安排. 这样的刚体变换必须将顶点换到顶点，且由指定的两个相邻面的像所唯一确定(反射在三维空间中无法实现，故不计算在内). 第一个面有 12 个可能的像，一旦这个像被指定，那么它的邻居有 5 种可能的像. 于是该十二面体共有 $12\times5=60$ 种对称，从而这 12！种安排中的每一种与 60 种安排(包括它自己)本质上是一样的. 因此本质上不同的安排共有$\frac{12!}{60}=\frac{11!}{5}$种.

问题 203 (1) 设 n 是等于其每位数字的平方和的数. 如果 n 有 k 位数字，我们必有 $10^{k-1}\leqslant n\leqslant 9^2k=81k$. 而对于 $p\geqslant 4$，假设 $81p<10^{p-1}$，则 $81(p+1)<10^{p-1}+81<10^p$. 因为 $81\times4<10^3$，所以由数学归纳法得，$81p<10^{p-1}$对 $p\geqslant4$ 都成立. 于是 $k\leqslant3$，且对数字 a_0、a_1、a_2，有 $n=a_2 10^2+a_1 10+a_0$. 因为 $a_2 10^2+a_1 10+a_0=a_2^2+a_1^2+a_0^2$，所以

$$(10^2-a_2)a_2+(10-a_1)a_1=a_0^2-a_0.$$

等式两边都是非负整数，且 $1\leqslant a_0\leqslant 9$，从而 $a_0^2-a_0$ 至多是 72. 因为 $10^2-a_2\geqslant 91$，所以 $a_2=0$. 因此$(10-a_1)a_1=a_0^2-a_0$.

因为$(10-a_1)a_1$ 的可能值是 0，9，16，21，24，25，而 $a_0^2-a_0$ 的可能值是 0，2，6，12，20，30，42，56，72，从而结论得证.

(2) 设 n 是等于其每位数字的立方和的数. 如果 n 有 k 位数字，那么 $10^{k-1}\leqslant 729k$. 如(1)那样讨论，可得 $k\leqslant 4$.

如果 $k=4$，$n=a_3 10^3+a_2 10^2+a_1 10+a_0=a_3^3+a_2^3+a_1^3+a_0^3$，从而

$$\begin{aligned}a_3(919)=a_3(10^3-9^2)&\leqslant a_3(10^3-a_3^2)\\&=a_3 10^3-a_3^3\\&=a_2(a_2^2-10^2)+\\&\quad a_1(a_1^2-10)+a_0(a_0^2-1)\\&\leqslant 0+9\times71+9\times80=1359.\end{aligned}$$

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

因此，$a_3 \leqslant 1$. 不难发现 $a_3 \neq 1$，从而 $k \leqslant 3$.

因为 28，35，65，72，91 是仅有的等于两个立方数之和的两位数，所以显然 $k \neq 2$. 对 $k=1$ 来说，仅有的可能是 $n=1$.

因此我们假定 $k=3$，则

$$n=a_2 10^2+a_1 10+a_0=a_2^3+a_1^3+a_0^3,$$

且 $a_2 \neq 0$. 从这可推出

$$a_2(100-a_2^2)+a_1(10-a_1^2)-a_0(a_0^2-1)=0.$$

a_2、a_1、a_0 的可能选择可从下表中找到：

x	$x(100-x^2)$	$x(10-x^2)$	$-x(x^2-1)$
0	0	0	0
1	99	9	0
2	192	12	−6
3	273	3	−24
4	336	−24	−60
5	375	−75	−120
6	384	−156	−210
7	357	−273	−336
8	288	−432	−504
9	171	−639	−720

显然，a_1 与 a_0 不能是 8 或 9. 通过考察末位数，可能性被迅速地缩小为 153，370，371 和 407.

问题 204 总共有 6 种本质上不同的方法，如图 140 所示.

问题 205 最好是反向来考虑. 每一步，本质上只有一种方法来分配钱. 注意到所有这三个人手里拿的钱的总数总是 \$72.

第三次游戏后，钱的分布是 \$24，\$24，\$24，

第二次游戏后，钱的分布是 \$12，\$12，\$48，

第一次游戏后，钱的分布是 \$6，\$42，\$24，

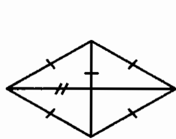
最初的时候，钱的分布是 \$39，\$21，\$12.

问题 206 (1) 由三角不等式，$2\,\overline{BC}=\overline{AB}<\overline{AC}+\overline{BC}$，从而 $\overline{BC}<\overline{AC}$. 因此，$BC$ 是最短边.

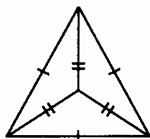
因为 $24=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=3\,\overline{BC}+\overline{AC}>4\,\overline{BC}$，所以我们有 $\overline{BC}<6$.

因为 $24=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}<\overline{AB}+\overline{BC}+(\overline{AB}+\overline{BC})=6\,\overline{BC}$，所以我们有 $\overline{BC}>4$.

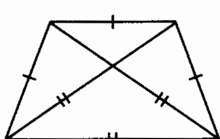
(2) 假设该三角形是 ABC，且 $3\,\overline{BC}=\overline{AB}$. 那么，如(1)那样，可以证明 $2\,\overline{BC}<\overline{AC}$，$BC$ 是最短边.



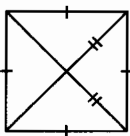
(5-1)



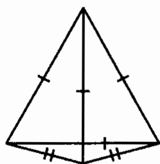
(3-3)



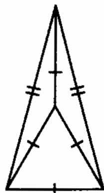
(3-3)



(4-2)



(4-2)



(4-2)

图 140

于是 $24=4\overline{BC}+\overline{AC}>6\overline{BC}$,从而有$\overline{BC}<4$.

又 $24<2(\overline{AB}+\overline{BC})=8\overline{BC}$,从而有$\overline{BC}>3$.

问题 207 (1) 当 $k=1$、2 时,不等式中等号成立. 当 $k=0$ 时,严格不等式成立. 当 $k\geqslant3$ 时,

$$1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}>3^{2k}=9^k>2\times7^k.$$

(2) 当 $k=0$、1 时,不等式中等号成立. 当 $k\geqslant2$ 时,

$$\begin{aligned}1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}&>3^{2k+1}\\&=3^k\times3^{k+1}\\&>2\times2^k\times3^{k+1}\\&=6^{k+1}.\end{aligned}$$

问题 208 将方程两边展开,我们有

$$x^3+6x^2+11x+6=x^3+6x^2-7x-60,$$

从而得 $x=-\dfrac{11}{3}$.

问题 209 如果此数是 M,则 $M+1$ 必定是 2,3,…,10 的最小公倍数,即 $2^3\times3^2\times5\times7$. 因此 $M=2519$.

问题 210 问题中的情形可用图象来表示,见图 141. 假设我们选择这样的时间单位,它使得行驶得较快的车从 A 开到 B 用了 4 个时间单位,较慢的车用了 5 个时间单位. 设 A 在读数为 a 的里程标处,B 在读数为 b 的里程标处. 图中的折线描述的是汽车的行进过程,x 是第二次相遇的时间,u 是第三次相遇的时间. 由相似三角形,我们发现

$$\frac{b-145}{145-a}=\frac{10-x}{x-5}=\frac{x-4}{8-x},$$

由此 $x=\dfrac{20}{3}$,$2a+b=435$. 类似地,有

$$\frac{b-201}{201-a}=\frac{12-u}{u-8}=\frac{u-10}{15-u},$$

由此 $u=\dfrac{100}{9}$,$2a+7b=1809$. 于是可求出 $a=103$,$b=229$. 因此 A 在第 103 里程标处,而 B 在第 229 里程标处.

问题 211 观察 $7^2=49$,$7^3=343$,$7^4=2401=24\times100+1$. 这就提示我们尽可能多地分离出因数 7^4. 于是

$$\begin{aligned}7^{9999}&=7^3\times7^{9996}=343\times(7^4)^{2499}\\&=343\times(2401)^{2499}\\&=343\times(1+2400)^{2499}\\&\equiv343\times(1+2499\times2400)\pmod{1000}\\&\quad(\text{由二项式定理})\\&=343\times[1+(2500-1)\times2400]\\&\equiv343\times(1-2400)\pmod{1000}\\&\equiv343\times601\pmod{1000}\\&\equiv143\pmod{1000}.\end{aligned}$$

因此,最后三位数字是 143.

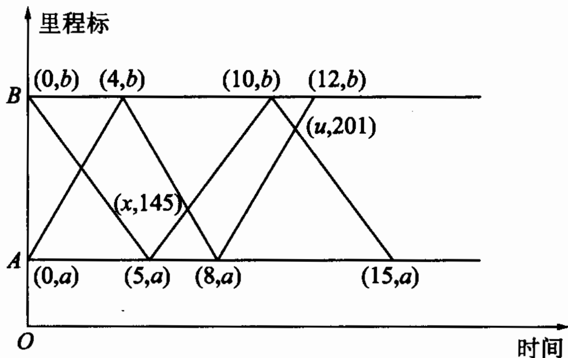


图 141

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 212 解法一：如图 142，过 Y 画 BC 的平行线，交 AB 于 Z. 设 CZ 与 BY 交于点 D，CZ 与 XY 交于点 E. 联结 DX.

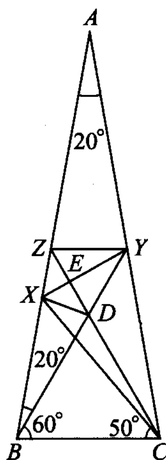


图 142

因为$\angle ZCB=\angle YBC=60°$，所以$\triangle DBC$是等边三角形. 因此，$\angle ZDY=60°$，从而等腰三角形 ZDY 事实上是等边的.

考虑 $\triangle BXC$. 因为 $\angle BXC=50°=\angle BCX$，所以$\overline{BX}=\overline{BC}=\overline{BD}$. 因此$\angle BXD=\angle BDX=80°$，于是$\angle ZXD=100°$.

现在

$$\angle XZD=180°-\angle AZY-\angle YZD=40°,$$
$$\angle XDZ=180°-\angle BDC-\angle BDX=40°.$$

因此 $\overline{XZ}=\overline{XD}$. 又因为 $\overline{YZ}=\overline{YD}$，$\triangle XZY\cong\triangle XDY$. 于是

$$\angle ZXY=\angle YXD=\frac{1}{2}\angle ZXD=50°.$$

解法二：如图 143，我们可以将 A 看成是一个正十八边形的中心，BC 是其一条边. 设 D、B、C、E、F、G、H 是这个十八边形的 7 个有序顶点，联结 DH. 设 DH 分别交 AB、AC、AE 于 X、Y、W. 我们来证明用此方法构造的点 X、Y 恰好是问题中所指定的那两点.

考虑七边形 $DBCEFGH$. 它的内角和是 900°. 因为$\angle HDB=\angle DHG$，且其余五个角都是 160°，我们必有$\angle HDB=50°$. 因

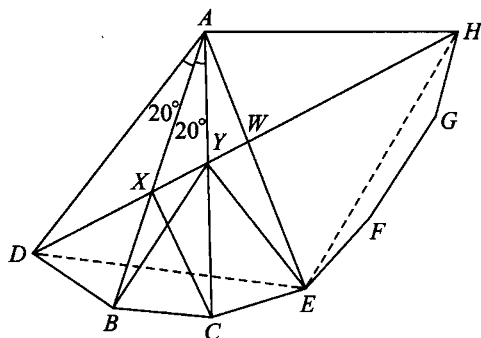


图 143

为$\triangle DXB\cong\triangle CXB$，$\angle XCB=\angle XDB=50°$.

因为 $\angle DAE=60°$，$\overline{AD}=\overline{AE}$，所以$\triangle ADE$ 是等边三角形. 类似地，有$\triangle AHE$ 也是等边三角形. 所以

$$\overline{AD}=\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{AH}=\overline{HE},$$

因此 $ADEH$ 是菱形，线段 DH 和 AE 相互垂直平分. 因此$\overline{AY}=\overline{YE}=\overline{YB}$，从而$\angle ABY=\angle BAY=20°$. 因为$\angle ABC=80°$，所以$\angle YBC=60°$.

于是，X 和 Y 与问题指定的那两点等同. 我们看到，在$\triangle XDB$ 中，$\angle XBD=80°$，$\angle XDB=50°$，所以 $\angle DXB=50°$. 因此$\angle AXY=50°$.

【评论】 这一问题在美国数学协会 1976 年出版的罗斯·洪斯贝格的著作《数学体操Ⅱ》(pp. 16—18)中有讨论.

问题 213 四面体的体积与其底(其三角形面之一)面积成比例，也与高(余下的顶点到该底面的垂直距离)成比例. 所以，我们通过证明这些要素中的每个都保持不变来解答这一问题. 显然，只要证明其中一条线段保持固定而另一条允许移动的情况，就可证明该结论.

如图 144，设 AB 是固定的线段，CD 沿着直线 l 变化. 设 π 是包含点 A 和直线 l 的平面. 那么对于 CD 的所有位置，$\triangle ACD$ 的

面积始终是常数．而从 B 到面 ACD 的距离就是 B 到 π 的距离，它也是常数．故得结论．

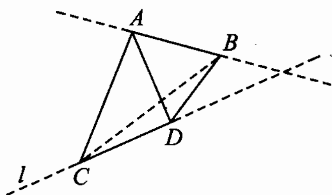


图 144

【评论】 还可以证明一个四面体的体积等于一对对棱的长、它们之间的最短距离及这两棱之间夹角的正弦值的乘积的六分之一．(参见工具箱 E41、E42．)

问题 214 (1) 解法一：设 u 是这队人的行进速度，x 是检阅官走过的距离．该官员的速度是 ux．当他向前行进时，其关于队伍的相对速度是 $u(x-1)$，因此他花了 $\frac{1}{u(x-1)}$ 的时间到达队伍的前端．在回到队尾时，他的相对速度是 $u(x+1)$，因此所花的时间是 $\frac{1}{u(x+1)}$．因为该列队伍走完这 1 千米路程所花的时间是 $\frac{1}{u}$，(乘了 u 之后)得

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1.$$

于是 $x^2-2x-1=0$．由于负根不适合，舍去，故 $x=1+\sqrt{2}$．因此该官员走了 $1+\sqrt{2}$ 千米．

解法二：设 v 和 u 分别为该官员和这队人的行进速度．设 t 和 s 分别为该官员到达队伍前端及回到队尾所花的时间．则 $(v-u)t=1,(v+u)s=1,u(t+s)=1$．因此

$$u\left(\frac{1}{v-u}+\frac{1}{v+u}\right)=1,$$

或

$$v^2-2vu-u^2=0,$$

从而 $v=u(1+\sqrt{2})$．所以该官员所走过的路程为

$$v(t+s)=u(1+\sqrt{2})\frac{1}{u}=1+\sqrt{2}(\text{千米}).$$

(2) 如(1)所述，该官员向前与向后时相对于该方阵的速度分别是 $u(x-1)$ 与 $u(x+1)$．当穿越方阵到达阵前及阵后时，他的速度在队伍行进的方向以及垂直的方向有分量 u 和 v，其中 $u^2+v^2=u^2x^2$．因此 $v=u\sqrt{x^2-1}$．于是该巡回视察花的总时间是

$$\frac{1}{u(x-1)}+\frac{1}{u(x+1)}+\frac{2}{u\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{u}.$$

从而推出

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}=1-\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=1-\frac{2x}{x^2-1},$$

或

$$2\sqrt{x^2-1}=x^2-2x-1.$$

问题的条件要求 $x>1$．(事实上，他至少走 1 千米才能到达队伍前方，当他从方阵头走到方阵尾部时还要走约 2 千米，因此 $x>3$．)

在图 145 中，我们给出了 x 的图象解答．所求的根满足 $4<x<5$．去根式得 $x^4-4x^3-2x^2+4x+5=0$，所以其近似解为 $x=4.18$．

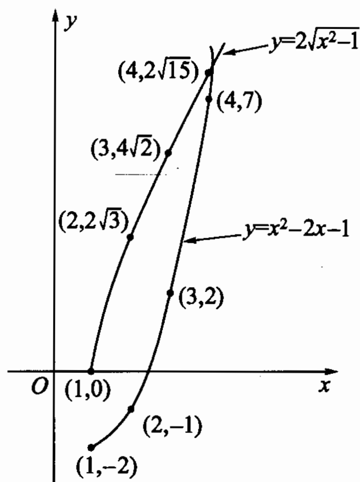


图 145

PDF电子书基地：http://dayo1982.400gb.com

问题 215 设 v 是该四面体的体积，t 是这四个面的公共面积. 那么每条从顶点到其对应面的垂线的长度都是 h，其中 $3v=th$. 因为 $\overline{OA}+\overline{OL}\geqslant h$，所以

$$t(\overline{OA}+\overline{OL})\geqslant 3v=t(\overline{OL}+\overline{OM}+\overline{ON}+\overline{OP}),$$

从而 $\overline{OA}\geqslant\overline{OM}+\overline{ON}+\overline{OP}$. 将这一不等式与关于 OB、OC、OD 的类似不等式相加，便可得所要结果.

【习题】 当各个面的面积不一定相等时，同样的不等式仍然成立吗？

问题 216 设 x 是在开始排水时已有的积水量，y 是每小时渗漏的水量，z 为每个人每小时排出的水量. 假设 $h(n)$ 是 n 个人排干积水所需的时间（单位：时）. 那么

$$x+h(n)y=nh(n)z. \qquad (*)$$

特别地，

$$x+3y=12\times 3z=36z,$$

及

$$x+10y=5\times 10z=50z,$$

因而 $y=2z$，且 $x=30z$. 于是（$*$）式化为 $30+2h(n)=nh(n)$ 或 $h(n)(n-2)=30$. 当 $h(n)=2$ 时，$n=17$. 因此在 2 小时内排干积水需要 17 个人.

问题 217 用黑白交替的方法将棋盘中的方格涂色，使得任何一对相邻的方格涂上不同的颜色. 马走的每一步所占的一对方格必有不同的颜色. 因为马的任何一次旅行要走过 mn 个方格，且 mn 是奇数，所以最后占据的方格与第一格有相同的颜色. 因此，它不可能是马走动一步能到的格子.

【习题】 必定有一条马的非封闭旅行路线吗？

问题 218 假设对该手表而言，在指针的相邻两次遮蔽之间过去了 x 分钟. 分针每走过 x 单位，时针走过 $\frac{x}{12}$ 单位. 因此 $x-60=\frac{x}{12}$，从而 $x=60\cdot\frac{12}{11}=60+\frac{60}{11}=65+\frac{5}{11}$. 于是我的手表每 65 分钟走快 $\frac{5}{11}$ 分钟.

为了使我的手表走快一小时，所花的总时间是

$$\frac{1}{60}\times\frac{60}{5/11}\times 65=143(\text{时}).$$

问题 219 如果 $x^2+y\geqslant 0$，$y^2+x\geqslant 0$，那么所给不等式是 $(y-x)(x+y-1)\geqslant 0$.

如果 $x^2+y\leqslant 0$，$y^2+x\leqslant 0$，那么所给不等式是 $(x-y)(x+y-1)\geqslant 0$.

如果 $x^2+y\leqslant 0$，$y^2+x\geqslant 0$，那么所给不等式是 $-(x^2+y)\leqslant y^2+x$，或 $x^2+y^2+x+y\geqslant 0$，或 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}$.

如果 $x^2+y\geqslant 0$，$y^2+x\leqslant 0$，那么所给不等式是 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}$.

于是草图如图 146.

作为检验，观察：如果 $y=0$，则该不等式退化为 $|x^2|\leqslant|x|$，或 $|x|\leqslant 1$. 如果 $x=0$，则该不等式退化为 $y=0$ 或 $|y|\geqslant 1$. $x=y$ 或 $x^2+y=0$ 轨迹上的每个点都落在所求轨迹上，而抛物线 $y^2+x=0$ 上的点只有 $(-1,-1)$ 和 $(0,0)$ 落在所求轨迹上，那些也是使得 $x^2+y=0$ 成立的点.

> 一般认为，一个优雅的解答以清晰、简明、合乎逻辑、出人意料为特征。
>
> Charles W. Trigg, *Mathematical Quickies* (Dover, 1985), p. vii

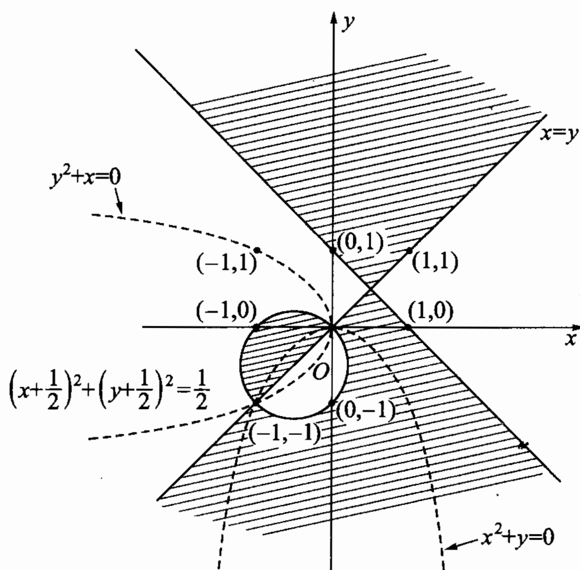


图 146

问题 220 解题思路是由左边得到一个包含平方的和与积的表达式，而它总是正的．由因子定理，$a-b$ 可整除 $3a^4-4a^3b+b^4$．于是

$$3a^4-4a^3b+b^4=3a^4-3a^3b-a^3b+b^4$$
$$=(a-b)3a^3-b(a^3-b^3)$$
$$=(a-b)3a^3-b(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a-b)(3a^3-a^2b-ab^2-b^3)$$
$$=(a-b)(a^3-b^3+a^3-a^2b+a^3-ab^2)$$
$$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2+a^2+a^2+ab)$$
$$=(a-b)^2[2a^2+(a+b)^2]\geqslant 0.$$

另解 由算术-几何平均值不等式，

$$\frac{a^4+a^4+a^4+b^4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^{12}b^4}=a^3b.$$

问题 221 如图 147，设三角形边长为 a、b、c，对应于边长 b、c 的角的大小为 α 和 2α．由正弦定理，

$$2\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{c}{b}.$$

由余弦定理，

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha=a^2+c^2-\frac{ac^2}{b},$$

从而

$$b(b^2-a^2)=c^2(b-a).$$

如果 $b=a$，那么内角就是 α、α、2α，这就导致$\alpha=45°$，此时 a、b、c 不可能都是整数．因此，$b-a\neq 0$．于是 $b(b+a)=c^2$．

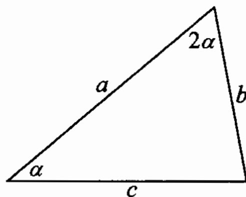


图 147

如有必要，可除去公因数，我们假设 a、b、c 的最大公因数是 1．则 b 与 $b+a$ 都必须是完全平方数．因此，对于一组互素的整数 r、s，我们有 $a=s^2-r^2$，$b=r^2$，$c=rs$．因为 $b<c<2b$，所以我们有 $r<s<2r$．

一般地，该三角形的边长必须是

$$k(s^2-r^2)、kr^2、krs,$$

其中 k、r、s 是正整数，且满足 $r<s<2r$，r 与 s 的最大公因数等于 1．

我们现在来证明，事实上，满足上述条件的三元组(k,r,s)就给出了满足条件要求的

三角形. 这是由于,如果 $a=s^2-r^2, b=r^2, c=rs$,那么

$$(a+c)-b=s(s+r)-2r^2>0,$$
$$(a+b)-c=s(s-r)>0,$$
$$(b+c)-a=2r^2+rs-s^2=(2r-s)(r+s)>0,$$

从而 a、b、c 可以是某三角形的三边. 如果 $\angle B$ 和 $\angle C$ 分别是对应于 b 和 c 的角,那么利用 $b(b+a)=c^2$,我们有

$$\cos C=\frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab}=\frac{a^2-ab}{2ab}=\frac{a-b}{2b},$$
$$\cos B=\frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac}=\frac{a(a+b)}{2ac}=\frac{c}{2b},$$

及

$$\cos 2B=2\left(\frac{c^2}{4b^2}\right)-1=\frac{a-b}{2b}=\cos C.$$

因此,$2\angle B=\angle C$.

问题 222 (1) 当且仅当一个数具有 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 的形式时,这个数是三角形数. 如果 $n=\frac{1}{2}k(k+1)$,那么 $9n+1=\frac{1}{2}(3k+1)(3k+2)$,所以它仍是三角形数.

(2) 假设对每个三角形数 n,$an+b$ 仍是三角形数. 如果 $n=\frac{1}{2}k(k+1)$,且 $an+b=\frac{1}{2}r(r+1)$,那么

$$\frac{ak(k+1)}{2}+b=\frac{r(r+1)}{2},$$

从而

$$r^2+r-[ak(k+1)+2b]=0.$$

对 k 的每个值,该二次方程都必须有一个整数解 r. 这一性质当且仅当选择的 a 与 b 满足:对每个 k,其判别式都是完全平方数时成立. 对某些与 k 无关的 u 和 v,如果 $1+4ak(k+1)+8b=(ku+v)^2$,那么通过比较系数,有 $4a=u^2=2uv$,故 $2v=u$. 因此 $b=\frac{v^2-1}{8}$,$a=v^2$. 如果 v 是奇数,那么 b 就是整数.

于是,如果 v 是任意奇数,$a=v^2$,$b=\frac{v^2-1}{8}$,且 $n=\frac{1}{2}k(k+1)$ 是三角形数,那么

$$an+b=\frac{v^2k(k+1)}{2}+\frac{v^2-1}{8}=\frac{1}{2}\left(vk+\frac{v-1}{2}\right)\left(vk+\frac{v+1}{2}\right)$$

也是三角形数.

问题 223 通过两边平方,容易验证:

$$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+3}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$4n+2$ 或 $4n+3$ 都不是平方数,因此

$$[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}],$$

从而结论得证.

问题 224 首先,我们来刻画使得 $\angle APB$ 达到最大的 P 点的位置. 过 A 和 B 画圆,使得该圆与 l 相切,设切点为 K(见图 148). 那么对 l 上的不等于 K 的任何点 P,有

$$\angle AKB=\angle ALB>\angle APB.$$

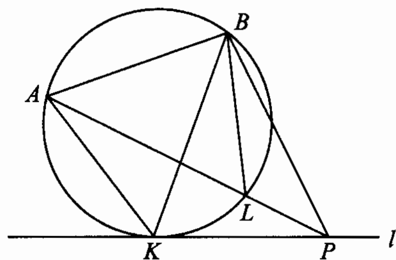


图 148

了解了这一点之后,我们就能容易地构造出使命题不成立的图形(见图 149).

问题 225 因为 $\sin C\leqslant 1$,且 $\sin A\sin B\geqslant 0$,所以

$$1\geqslant\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=1+\sin A\sin B(1-\sin C)\geqslant 1.$$

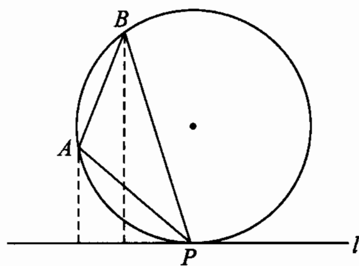


图 149

因此 $\cos(A-B)=1$，$\sin C=1$，于是 $\angle C=90^\circ$，$\angle A=\angle B=45^\circ$. 从而 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

问题 226 一个显然的推广是

$$a_n=(n+1)^2+(n+2)^2+[(n+1)(n+2)]^2$$
$$=(n^2+3n+3)^2.$$

问题 227 解法一：如果 $xyz=0$，不妨设 $z=0$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，则要证明的不等式是

$$8(x^3+y^3)^2\geqslant 9x^2y^2xy,$$

而这等价于以下显然成立的不等式

$$8x^6+7x^3y^3+8y^6\geqslant 0.$$

如果 $xyz\neq 0$，即 $x>0$，$y>0$，$z>0$，那么取

$$a=\frac{x^2}{yz},\ b=\frac{y^2}{zx},\ c=\frac{z^2}{xy},$$

则要证明的不等式等价于

$$8(a+b+c)^2-9\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant 0,$$

其中 a、b、$c>0$，$abc=1$. 现在不等式的左边等于

$$8(a^2+b^2+c^2)+16(ab+bc+ca)-18-9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$
$$=8(a^2+b^2+c^2)+7\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9(a+b+c)-18$$
$$=\frac{1}{a}(8a^3-9a^2-6a+7)+\frac{1}{b}(8b^3-9b^2-6b+7)+\frac{1}{c}(8c^3-9c^2-6c+7)$$
$$=\frac{(a-1)^2(8a+7)}{a}+\frac{(b-1)^2(8b+7)}{b}+\frac{(c-1)^2(8c+7)}{c},$$

该表达式当然是非负的.

解法二：由算术-几何平均值不等式，

$$(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)\leqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy}{3}\right)^3.$$

因为

$$0\leqslant(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

可得 $yz+zx+xy\leqslant x^2+y^2+z^2$.

因此

$$(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)\leqslant\frac{8}{27}(x^2+y^2+z^2)^3.$$

因为 $\left(\frac{x^m+y^m+z^m}{3}\right)^{\frac{1}{m}}$ 是关于 m 的增函数(参见工具箱 D7)，

所以 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，

从而 $(x^2+y^2+z^2)^3\leqslant 3(x^3+y^3+z^3)^2$.

由此即可得所需结论.

【评论】 证明下列推广：对 x_1，x_2，…，$x_n\geqslant 0$，

$$2^n\left(\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}\right)^{n-1}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^{n-1}+\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_i}\right).$$

问题 228 设 S 是握了偶数次手的人的集合，T 是握了奇数次手的人的集合. 对任何人 k，记 h_k 为他的握手次数.

因为每次握手都恰好涉及两个人，所以 $\sum\limits_{x\in S}h_x+\sum\limits_{y\in T}h_y$ 是握手总数的两倍，于是它是

偶数. 因为对 $x\in S$, h_x是偶数, 所以 $\sum_{x\in S} h_x$ 是偶数, 因此 $\sum_{y\in T} h_y$ 也是偶数. 但是对每个 $y\in T$, h_y 是奇数. 因此 T 必定包含偶数个人.

问题 229 定义

$$p=x+y+z.$$

从(1)式中减去(2)式, 得

$$p(x-y)=a^2-b^2. \tag{4}$$

类似地, 有

$$p(y-z)=b^2-c^2, \tag{5}$$

$$p(z-x)=c^2-a^2. \tag{6}$$

先考虑 $a^2=b^2=c^2$ 的情形. 则要么 $x=y=z$, 这只有在 $a=b=c=0$ 时出现, 要么 $p=x+y+z=0$. 在后一情形, 从(1)、(2)、(3)式都可得

$$x^2+xy+y^2=a^2.$$

于是, 不妨设 x 可任意取值, 而其余变量可随后确定.

现在假设 a^2、b^2、c^2 不全相等, 特别地有

$$a^2+b^2+c^2\neq 0.$$

由(4)、(5)、(6)式得 $p\neq 0$. 因为

$$py=px-(a^2-b^2), \quad pz=px+(c^2-a^2),$$

所以

$$p^2=p(x+y+z)=3px+(b^2+c^2-2a^2),$$

或

$$3px=p^2+(2a^2-b^2-c^2). \tag{7}$$

类似地, 有

$$3py=p^2+(2b^2-a^2-c^2), \tag{8}$$

$$3pz=p^2+(2c^2-a^2-b^2). \tag{9}$$

如果我们能独立地解出 p, 那么这些方程就可解出. 将(1)、(2)、(3)式相加, 得

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2).$$

联立(4)、(5)、(6)式, 得

$$p^2=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

由(7)式得,

$$x=\frac{1}{3p}[p^2+(2a^2-b^2-c^2)]$$
$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)[(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)+(a^2+b^2+c^2)(2a^2-b^2-c^2)]}{3\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}(a^2+b^2+c^2)}$$
$$=\frac{3a^4-3b^2c^2}{3\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}.$$

我偏爱那些专业性不强、能让一般读者容易理解的题目。题目应该具有某种优雅性:最好的题目在陈述上是优雅的(简短而舒畅),在结论上是优雅的,在解答上是优雅的。这样的题目可不容易得到。

Murray S. Klamkin, Problem Corner, *Math. Intelligencer*, vol. 5, #1, (1983): 59.

于是，我们最后得

$$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}.$$

（注意到 $a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2$ 不为零，因为 $p\neq 0$，所以它有两个平方根. $a^4-b^2c^2$ 等于零等价于 x 等于零. 对于 y 与 z 有类似的结论.）

问题 230 当 n 是偶数时，我们有

$$\begin{aligned}&(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+[(n-1)^2-n^2]\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)\\&\quad+\cdots+(n-1-n)(n-1+n)\\&=-(1+2)-(3+4)-\cdots-(n-1+n)\\&=-(1+2+3+4+\cdots+n)\\&=(-1)^{n+1}(1+2+3+\cdots+n).\end{aligned}$$

当 n 是奇数时，我们有

$$\begin{aligned}&1^2-(2^2-3^3)-(4^2-5^2)\\&\quad-\cdots-[(n-1)^2-n^2]\\&=1-(2-3)(2+3)-(4-5)(4+5)\\&\quad-\cdots-(n-1-n)(n-1+n)\\&=1+2+3+\cdots+n-1+n\\&=(-1)^{n+1}(1+2+3+\cdots+n).\end{aligned}$$

【评论】 该结果也可以用数学归纳法或将左边写成

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots)-$$
$$2\cdot 2^2(1^2+2^2+3^2+\cdots),$$

并利用平方和公式来证明.

该等式也可以用图解的方法来证明. 例如对于 $n=6$，可见图 150.

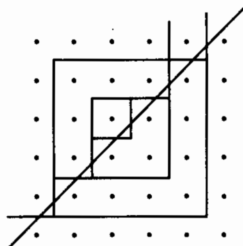


图 150

如画出的那样，加上 6^2 个点，减去 5^2 个点，加上 4^2 个点，减去 3^2 个点，等等. 剩下的点落在斜线的下方.

问题 231 因为 $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-(b-c)^2\leqslant a^2$，所以我们有

$$\begin{cases}(a+b-c)(a-b+c)\leqslant a^2,\\(b+c-a)(b-c+a)\leqslant b^2,\\(c+a-b)(c-a+b)\leqslant c^2.\end{cases}\qquad (*)$$

因为 $a+b-c>0$，$b+c-a>0$，$c+a-b>0$，所以我们将（$*$）中的三个不等式相乘，并取平方根，就得到了所要的不等式.

【说明】 其他的证明及推广，参见 *Crux Mathematicorum* 10 (1984)：46—48.

问题 232 设 O 是该区域的中心，AB 是任意弦. 设 $A'B'$ 是与 AB 中心对称的像，见图 151. 那么

$$\begin{aligned}\overline{AB}&\leqslant\overline{AO}+\overline{OB}\\&\leqslant 2\max(\overline{AO},\overline{OB})\\&=\max(2\overline{AO},2\overline{OB})\\&=\max(\overline{AA'},\overline{BB'}).\end{aligned}$$

结果得证.

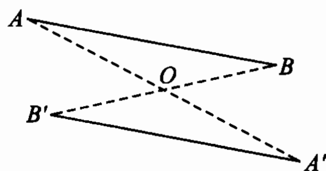


图 151

问题 233 当且仅当 k 是奇数时，有可能找到一系列移动，使得移动后的所有硬币最终都落在同一个扇形区域中.

假设 $k=2m+1$. 将这些扇形依次编号为：

$-m$，$-m+1$，…，-2，-1，0，1，2，…，$m-1$，m.

一系列形如（$-i\to -i+1$，$i\to i-1$）的

移动最终会将所有硬币移到 0 号扇形中.

另一方面，假设 $k=2m$. 将这些扇形依次编号为：1，2，3，…，$2m$. 对每个区域中的硬币，设 n_i 是第 i 个扇形中的硬币个数，并考虑和式

$$s=n_1+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k.$$

则每次移动后和 s 的值对模 k 保持不变. 对于硬币的初始位置，我们有

$$s=1+2+\cdots+2m=m(2m+1)\not\equiv 0 \pmod{2m}.$$

对于所有硬币都在第 i 个扇形中的情形，$s=2mi\equiv 0 \pmod{2m}$. 因此，不可能找到一系列移动，使得最终所有的硬币都放入同一个扇形中.

问题 234 所给方程等价于

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a, \tag{1}$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b. \tag{2}$$

(1)式除以(2)式，得

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}. \tag{3}$$

将(1)、(2)式平方并相加，得

$$4\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2. \tag{4}$$

由(3)式和(4)式有

$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

及

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

(我们也可以在这两个表达式之前都加一个负号，最后结果是一样的.)

因此，

$$2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a^2+b^2+2b}{2\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2+b^2-2b}{2\sqrt{a^2+b^2}},$$

从而

$$\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}=\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}. \tag{5}$$

所以，

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}&=\tan\frac{x+y}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\right)\\&=\frac{a}{b}\left(\frac{4b}{a^2+b^2+2b}\right)\\&=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}.\end{aligned} \tag{6}$$

由(5)式和(6)式，我们可以将 $\tan\frac{x}{2}$ 和 $\tan\frac{y}{2}$ 定义为下列二次方程的根：

$$(a^2+b^2+2b)t^2-4at+(a^2+b^2-2b)=0.$$

问题 235 参见图 152，我们看到，因为 $\triangle BMN$ 是等腰三角形，所以 $\angle BNM=\frac{1}{2}\angle BMA$，故它是常值角. 因此 N 一定在过 A、B 点的一个圆上. 该圆的中心在点 O 处，使得 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{OQ}$. 然而，轨迹将只包含该圆的一部分，即从点 B 到点 P 的弧，点 P 满足 $\overline{AP}=\overline{AB}$，且 AP 与圆 AOB 相切. 这

图 152

是由于如果 N 落在该弧上，那么 $\angle BNA = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AMB$，因此 $\angle BNM = \angle MBN$，$\overline{BM}=\overline{MN}$.

考虑到 M 可以在 AB 的任意一边的可能性，我们得到 N 的轨迹由两个圆弧构成，它们都从 B 点出发，都通过 A、B 两点，圆心分别为平分 AB 的直径的两个端点. 它们都落在过 A 的已知圆的切线的同侧.

【思考】 如何解释这两个圆剩余的部分?

问题 236 该方程即

$$x^6+x^5+x^4-28x^3+x^2+x+1=0.$$

显然，$x=0$ 不是其解. 因此该方程等价于

$$x^3+x^2+x-28+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0.$$

设 $z=x+\frac{1}{x}$. 那么 $z^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$，且 $z^3=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}$. 因此 $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$，$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$. 于是，我们得到方程

$$z^3+z^2-2z-30=0.$$

通过尝试，我们得 $z=3$ 是其根. 故由因子定理，得

$$(z-3)(z^2+4z+10)=0,$$

因此 $z=3$ 是唯一的实根.

因为 x 是实数意味着 z 也是实数，所以实数解 x 必须满足 $3=x+\frac{1}{x}$，或 $x^2-3x+1=0$，即

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

【评论】 由笛卡儿正负号规则，一开始就能看出该方程至多有两个正数解.

问题 237 解法一：设汽油被分成 n 份：b_1，b_2，…，b_n，它们被放置在点 P_1，P_2，…，P_n 处，这些点的次序是以顺时针方向绕赛道而标的. 假设从点 P_i 到 P_{i+1} 需要使用的汽油量为 $a_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，从 P_n 到 P_1 所需汽油量是 a_n.

设 $x_i=b_i-a_i$，$S_i=x_1+x_2+\cdots+x_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 注意到 $S_n=0$. 选择 r，使得对每个 i，有 $S_r\leqslant S_i$. 那么对每个 i，我们有

$$x_{r+1} = S_{r+1}-S_r\geqslant 0,$$
$$x_{r+1}+x_{r+2} = S_{r+2}-S_r\geqslant 0,$$
$$\vdots$$
$$x_{r+1}+x_{r+2}+\cdots+x_i = S_i-S_r\geqslant 0.$$

因此，如果我们让赛车从第 $r+1$ 处出发，因为 $b_{r+1}\geqslant a_{r+1}$，$b_{r+1}+b_{r+2}\geqslant a_{r+1}+a_{r+2}$，等等，所以该车总是有充足的汽油从每个位置开到下一个位置.

解法二(数学归纳法)：我们证明一个顺时针的巡回总是可以完成的. 如果所有的汽油都放在一个点上，则结论显然成立.

假设将汽油任意分成 $n-1$ 份时结论成立. 现在，数量为 b_1，b_2，…，b_n 的汽油被放置在点 P_1，P_2，…，P_n 处(按顺时针方向). 至少存在一个位置，赛车有充足的汽油从此处沿顺时针方向开到下一个位置. 不失一般性，我们假设 b_1 是使赛车从 P_1 开到 P_2 处的足够的汽油量.

将 P_2 处的汽油全部倒到 P_1 处. 由归纳假设，在 P_1 处放 b_1+b_2 量的汽油，在 P_i 处放 b_i 量的汽油($i=3, 4, \cdots, n$)，则从某点 r 出发，该巡回能够完成. 因为 b_1 是 P_1 处的汽油量，赛车用此汽油足够从 P_1 处开到 P_2 处，所以，当将 b_2 量的汽油倒回给 P_2 处后，同样的巡回仍然能够完成.

问题 238 由周期性，我们仅需考虑属于某个长度为 2π 的区间中 x 的值的情况. 于是，假设 $-\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$.

先假定 $\frac{1}{2}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$，则 $-1\leqslant\cos x<0$，从而 $\sin(\cos x)<0$. 而 $-\frac{1}{2}\pi<-1\leqslant$

$\sin x \leqslant 1 < \frac{1}{2}\pi$ 保证了 $\cos(\sin x) \geqslant 0$. 因此，对于 $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$，有 $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

考虑 $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ 的情形. 显然，$x=0$ 时不等式成立. 当 $x<0$ 时，有

$\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$，

且 $\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$. 所以我们只要对 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ 进行证明即可. 此时 $0 < \sin x < x$，且因为当 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ 时，$\cos x$ 是递减函数，故

$$\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x).$$

【习题】 研究 $\sin(\sin x)$ 与 $\cos(\cos x)$ 之间的关系.

问题 239 所给方程等价于

$$(x+y+1)(x+y-m-1)=0.$$

因为对每对合适的(x, y)，有 $x+y+1>0$，而 $x+y=m+1$ 显然有 m 个解：$(x, y)=(i, m+1-i), i=1, 2, \cdots, m$.

问题 240 如图 153，分别选取 AB、BC、DA 的中点作为 P、Q、S. 因为 $PQRS$ 的面积与 $PQR'S$ 的面积相等，所以，面积 SQR = 面积 SQR'，从而 $SQ /\!/ DC$. 于是必有 $SQ /\!/ AB$. 因此 $AB /\!/ CD$. 类似地，有 $AD /\!/ BC$. 于是 $ABCD$ 一定是平行四边形.

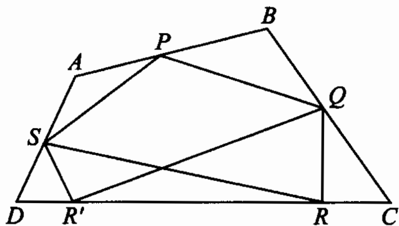


图 153

我们现在来证明对内接于任意平行四边形中的任何凸四边形 $PQRS$ 面积相等的结论成立. 由如图 154 所示记号，我们得到

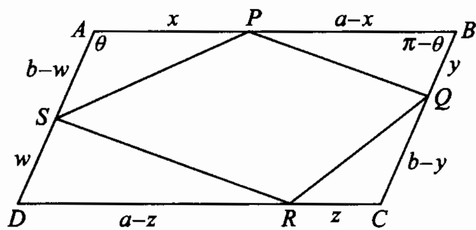


图 154

$$\begin{aligned}&2(S_{ABCD}-S_{PQRS})\\&=\sin\theta\,[x(b-w)+y(a-x)+z(b-y)+w(a-z)]\\&=\sin\theta\,[(a-x)w+(b-y)x+(a-z)y+(b-w)z]\\&=2(S_{ABCD}-S_{P'Q'R'S'}).\end{aligned}$$

因此，$S_{PQRS}=S_{P'Q'R'S'}$.

问题 241 由已知的方程组得，关于 t 的四次多项式

$$t^4-wt^3-zt^2-yt-x$$

有根 a、b、c、d. 因此它等于 $(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)$. 将其展开，并比较系数，得

$$\begin{aligned}&w=a+b+c+d,\\&z=-(ab+bc+cd+da+ac+bd),\\&y=abc+abd+acd+bcd,\\&x=-abcd.\end{aligned}$$

【习题】 当 a、b、c、d 不是互不相等时，你能得到什么结论？

问题 242 解法一：因为 a 和 b 必须具有形式 $2mn$ 及 m^2-n^2（不必区分），我们必须证明

$$P \equiv mn(m-n)(m+n)\times(m^2-2mn-n^2)(m^2+2mn-n^2)$$

能被 $2\times3\times7$ 整除. 只要考虑 m 和 n 互素的情况即可.

由模 2、模 3 的同余，我们发现 $mn(m-n)(m+n)$ 能被 6 整除.

取模 7 的同余，如果 $m\equiv0$，$n\equiv0$，$m\equiv n$，或 $m\equiv-n\pmod 7$，那么 $P\equiv0$. 剩下的情况是

$$(m, n)=(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,6), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6).$$

对每种情形，有

$$(m^2-2mn-n^2)(m^2+2mn-n^2)\equiv0\pmod 7.$$

解法二：只要证 a、b、c 的最大公因数为 1 时结论成立即可. 因为 c 及 a、b 之一，不妨设 a 是奇数，所以 $b^2=c^2-a^2$ 能被 8 整除. 因此 $b\equiv0\pmod 4$，于是 $ab\equiv0\pmod 4$.

因为 $a^2+b^2=c^2\not\equiv2\pmod 3$，所以 a、b 之一可被 3 整除，于是 $ab\equiv0\pmod 3$.

因为对模 7，任何平方数都同余于 0、1、2 或 4，可以验证，只有在 $a\equiv b\pmod 7$，$a\equiv-b\pmod 7$，或 $ab\equiv0\pmod 7$ 时，a^2+b^2 同余于某个平方数. 从以上这些断言便可得出结论.

问题 243 解法一：固定一个 $\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的值 A，则 $\cos A>0$，且 $\cos(B+C)$ 被确定. 因为

$$\sin B\sin C=\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)],$$

所以 $\sin^2A+\sin B\sin C\cos A$ 在 $B=C$ 时达到最大值. 此时 $A=\pi-2B$，$\sin A=\sin 2B$，$\cos A=-\cos 2B$，且

$$\begin{aligned}&\sin^2A+\sin B\sin C\cos A\\=&\sin^2 2B-\sin^2B\cos 2B\\=&\sin^2B(4\cos^2B-2\cos^2B+1)\\=&\sin^2B(2\cos^2B+1)\\=&\sin^2B(3-2\sin^2B).\end{aligned}$$

函数 $u(3-2u)=\frac{9}{8}-2\left(u-\frac{3}{4}\right)^2$ 在 $u=\frac{3}{4}$ 时达到其最大值. 因此 $\sin^2B(3-2\sin^2B)$ 在 $B=\frac{\pi}{3}$ 时达到最大值.

于是，当 $A\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\sin^2A+\sin B\sin C\cos A$$

在 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时达到最大值 $\frac{9}{8}$.

如果 $A>\frac{\pi}{2}$，$\cos A$ 的值是负的，而 $\sin B$ 与 $\sin C$ 的值却是正的. 于是表达式 $\sin^2A+\sin B\sin C\cos A$ 的值不会超过 1.

解法二：设 R 是三角形外接圆半径，a、b、c 是三角形的角 A、B、C 所对的边长. 利用 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，$a=2R\sin A$ 等公式，我们可以将原表达式转化为求 $\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ 的最大值.

一个等价的问题是对于半径为 R 的圆的内接三角形，求其各边长的平方和的最大值. 因此设 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3) 是内接于由方程 $x^2+y^2=R^2$ 定义的圆的三角形的顶点坐标. 则因为 $x_i^2+y_i^2=R^2(i=1, 2, 3)$，所以

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2\\=&(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2+(y_1-y_2)^2+(y_2-y_3)^2+(y_3-y_1)^2\\=&3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2+3(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(y_1+y_2+y_3)^2\\=&9R^2-(x_1+x_2+x_3)^2-(y_1+y_2+y_3)^2.\end{aligned}$$

于是 $a^2+b^2+c^2\leqslant9R^2$，当且仅当 $x_1+x_2+x_3=0=y_1+y_2+y_3$，或者该三角形的形心与外心重叠(即该三角形是等边三角形)时，等号成立.

所以，$\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ 的最大值是 $\frac{9}{8}$.

【习题】 (1) 更一般地，证明：

$$yza^2+zxb^2+xyc^2\leqslant(x+y+z)^2R^2,$$

其中 x、y、z 是任意实数；

(2) 证明比上题更一般的关系式：

$$(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geqslant yza^2+zxb^2+xyc^2,$$

其中 x、y、z 是任意实数，R_1、R_2、R_3 分别是从任意点 P 到三角形顶点 A、B、C 的距离.

问题 244 解法一：不失一般性，我们取这三个点 A、B、C 之一，比如 A 点，固定在 x 轴上，如图 155 所示. 设从 AO 出发按逆时针方向计算 $\angle AOB=\theta$，$\angle AOC=\varphi$，则 θ 和 φ 都落在区间 $[0,\ 2\pi]$ 内. $\theta=\varphi$ 的概率为零，$\theta>\varphi$ 与 $\varphi>\theta$ 出现的概率是等可能的. 从而我们可假设 $\varphi>\theta$. 这就给出了一致概率空间 $\{(\varphi,\ \theta)\,|\,0<\varphi<2\pi,\ \theta<\varphi\}$.

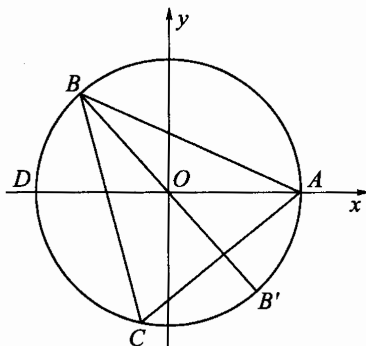


图 155

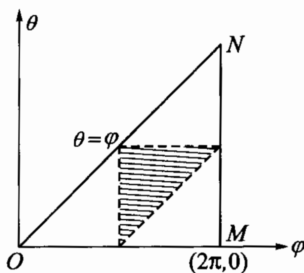


图 156

对于锐角△ABC，$\theta<\pi$，且点 C 必须落在弧 DB' 上(B'是点 B 的中心对称点)，从而 $\pi<\varphi<\theta+\pi$.（如果 C 在 B 与 D 之间，则 $\angle CBA$ 将是钝角；如果 C 在 B' 与 A 之间，则 $\angle BAC$ 就将是钝角.）这些限制条件使得点(φ, θ)落在一个三角形区域中，该三角形的顶点是 ON、NM 和 MO 的中点，这个三角形的面积是△OMN 面积的 $\frac{1}{4}$，见图 156. 因此，所求的概率是 $\frac{1}{4}$.

解法二(微积分方法)：设该圆的周长为 1. 设 t 是点 A 与点 B 之间的短弧的长. t 可以在区间 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 内被等概率地选取. 如果△ABC 是锐角三角形，则 C 就必须落在如图 157 所示的长为 t 的一段弧上. 它出现的概率为 t. 于是△ABC 是锐角三角形的概率是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\int_0^{\frac{1}{2}} t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}.$$

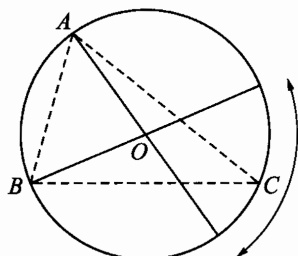


图 157

问题 245 这样的涂色是可能的. 如果 $x+y$ 是偶数，则将点(x, y)涂红色；如果 x 是奇数而 y 是偶数，则涂白色；如果 x 是偶数而 y 是奇数，则涂蓝色. 显然，条件(a)满足. 现在假设点(x_1, y_1)是红色，点(x_2, y_2)是白色，点(x_3, y_3)是蓝色. 那么 x_2-x_1 与 y_2-y_1 奇偶性相反；x_3-x_2 与 y_3-y_2 都是奇数. 因此

$$(y_2-y_1)(x_3-x_2)\neq(y_3-y_2)(x_2-x_1),$$

从而 $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\neq\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（即这三点不共线）.

问题 246 以散步者的眼光来考虑. 假设风速为 v，与正东方向的夹角为 θ. 空气的相对速度有两个分量，一个分量是由风引起的 $\overrightarrow{OW}$，另一分量是由他的散步引起的，起初是 $\overrightarrow{OP}$，后来是 $\overrightarrow{OQ}$(向南). 参见图 158，并利

用以下事实：$\overline{WV}=\overline{OQ}=8$，$\overline{OU}=\overline{UV}=\overline{WV}-\overline{WU}=4$，我们有 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$v=4\sqrt{2}$. 于是，风以 $4\sqrt{2}$千米/时的速度向东北方向吹.

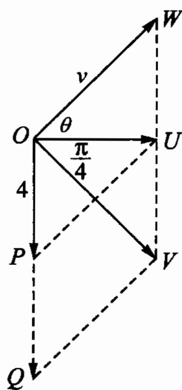


图 158

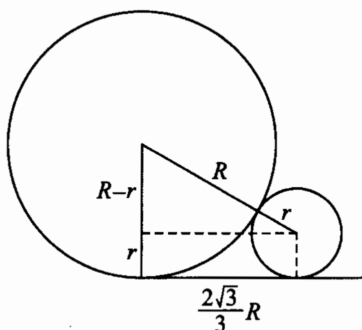


图 159

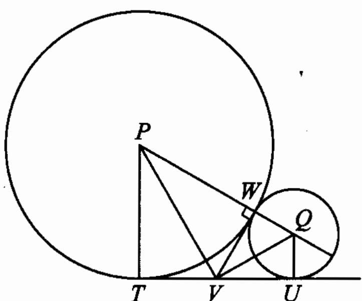


图 160

问题 247 这一布局为：桌面上有三个半径为 R 的球，每个都与另两个接触，外加第四个半径为 r 的较小的球，嵌在前三个球与桌子中间.

因为第四个球与桌面的接触点是边长为 $2R$ 的等边三角形的外心，这一三角形的顶点是由那些较大的球与桌面的接触点构成的，所以它离每个大球与桌面的接触点的距离是$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

解法一：$R+r$ 是底为$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$、高为 $R-r$ 的直角三角形的斜边(见图 159). 因此

$$(R+r)^2=(R-r)^2+\frac{4}{3}R^2,$$

于是，$r=\frac{R}{3}$.

解法二：在图 160 中，P 和 Q 分别是大球和小球的中心，(与桌面的)接触点分别是 T 和 U. $VW\perp PQ$，$PV\perp VQ$，故$\overline{VW}=\overline{TV}=\overline{VU}=\frac{\sqrt{3}}{3}R$. 因为$\overline{VW}^2=\overline{PW}\cdot\overline{QW}$，$\frac{R^2}{3}=Rr$，所以 $r=\frac{R}{3}$.

问题 248 假设(a, b, c, d)是该方程的一个解，且 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$. 则 a 是二次式 $x^2-bcdx+(b^2+c^2+d^2)$的根. 由因子定理，它能被 $x-a$ 整除. 于是我们有

$$\begin{aligned}&x^2-bcdx+(b^2+c^2+d^2)\\=&(x-a)[x-(bcd-a)].\end{aligned}$$

因此，$(bcd-a, b, c, d)$是第二个解.

如果 $2\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，那么 $bcd-a\geqslant 2a^2-a>a$，于是，$(bcd-a)+b+c+d>a+b+c+d$. 重复这一过程，取 a 为 a、b、c、d 中最小的数，就可得出不同解的链. 从(2，2，2，2)出发，可得出(2，2，2，6)，(2，2，6，22)，(2，6，22，262)，(6，22，262，34582)等等.

问题 249 设$\angle BAC=60°$，且 BA 比 CA 长 10 英尺. 设 D 是这两个圆的第二个交点，见图 161. 因为 AC 是圆 ADC 的直径，所以

$CD \perp AD$. 又因为 AB 是圆 ADB 的直径，所以 $BD \perp AD$. 因此，B 和 C 落在垂直于 AD 的同一直线上. 于是从 D 到 BC 的距离为 0.

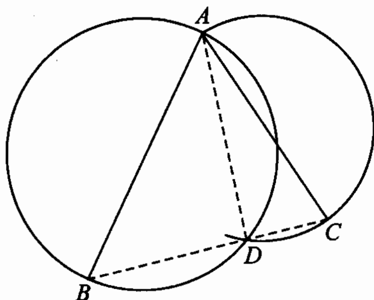


图 161

问题 250 解法一：将一条腰作为底，转动另一条腰画出一个半圆. 因为底是固定的，所以当高达到最大，即当两条腰垂直时，三角形的面积最大. 因此，当面积达到最大时，第三边的长度是腰长的$\sqrt{2}$倍.

解法二：设 θ 是两条腰之间的夹角，腰长为 a，则该三角形的面积是 $\frac{1}{2}a^2\sin\theta$. 因此当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时面积达到最大，此时第三边的长为 $\sqrt{2}a$.

问题 251 解法一：我们第一个解的思路来自于定理：圆外一点到圆的两条切线长相等. 图 162 中，有 $\overline{UP}=\overline{UR}$ 及 $\overline{VR}=\overline{VQ}$，于是 $\overline{UV}=\overline{PU}+\overline{VQ}$. 现在我们建立这个结论的逆：

命题 设 $ABCD$ 是一个正方形，且 P 和 Q 分别是 AB 和 BC 的中点. 设 U、V 是线段 PB 和 BQ 上的点，使 $\overline{UV}=\overline{PU}+\overline{VQ}$，则 UV 与这个正方形的内切圆相切.

证明：弦 UV 的三种可能情形为：

(1) 不与内切圆相交；

(2) 与内切圆相切；

(3) 与内切圆交于两点.

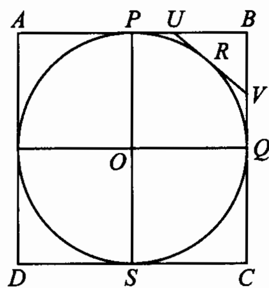


图 162

我们来排除情形(1)和(3). 假设这两种情形有一种成立，考虑与内切圆相切的 UV 的平行线 $U'V'$. 由前面所指出的，$\overline{U'V'}=\overline{PU'}+\overline{QV'}$. 在情形(1)下，$\overline{UV}<\overline{U'V'}$，$\overline{PU}>\overline{PU'}$，$\overline{QV}>\overline{QV'}$，与假设矛盾. 类似地，在情形(3)下，$\overline{UV}>\overline{U'V'}$，$\overline{PU}<\overline{PU'}$，$\overline{QV}<\overline{QV'}$，也与假设矛盾. 因此情形(2)成立.

(一个直接的证明是在 UV 上选择 R，使 $\overline{PU}=\overline{UR}$，$\overline{RV}=\overline{VQ}$，据此可证 $\angle BUV=2\angle URP$，$\angle BVU=2\angle VRQ$，因此 $\angle PRQ=135°$，于是 $PRQS$ 是圆的内接四边形，其中 S 是 CD 的中点.)

回到原问题. 设 $\overline{DF}=a$，$\overline{AE}=a+p$，$\overline{CH}=a+q$，$\overline{EH}=r$(见图 163). 因为 $\triangle EAD$ 相似于 $\triangle FCH$，所以 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}$，于是

$$\frac{2a}{a+p}=\frac{q+a}{a},$$

从而

$$q=\frac{a^2-ap}{a+p}.$$

对$\triangle BEH$应用勾股定理得，

$$\begin{aligned}r^2&=(a-p)^2+(a-q)^2\\&=(a-p)^2+\left(\frac{2ap}{a+p}\right)^2\\&=\frac{(a^2-p^2)^2+4a^2p^2}{(a+p)^2}\\&=\frac{(a^2+p^2)^2}{(a+p)^2},\end{aligned}$$

因此

$$r=\frac{a^2+p^2}{a+p}=p+\frac{a^2-ap}{a+p}=p+q.$$

再应用(前面给出的)命题即可得证.

图 163

解法二：当且仅当(正方形的中心)O 到 EH 的距离等于这个圆的半径 a 时内切圆与 EH 相切. 可通过用$\triangle OEH$ 的面积的两倍去除以 EH 的长度，从而得到三角形从 O 点出发的高. 建立笛卡儿坐标系，使 O 为原点，坐标轴与正方形的边平行. 于是，E 的坐标为(p, a)，H 的坐标为(a, q)，且$\triangle OEH$ 的面积等于$\frac{a^2-pq}{2}$.

如解法一，可得 EH 的长是 $p+q$，且 $pq=a^2-a(p+q)$. 于是 $a^2-pq=a(p+q)$. 因此从 O 到 EH 的距离是$\frac{a^2-pq}{p+q}=a$，即得所需.

解法三：以 O 为原点，如解法二建立笛卡儿坐标系. 过 E 和 H 的直线方程是

$$(a-q)x+(a-p)y=a^2-pq,$$

且从原点到这条直线的距离是

$$\frac{a^2-pq}{\sqrt{(a-p)^2+(a-q)^2}}=\frac{a(p+q)}{p+q}=a,$$

其中的计算过程如解法一. 因此 O 到 EH 的距离等于内切圆的半径.

解法四：(E. 迈克尔・蒂里翁)如图 164，设正方形的边长为 2. 令$\overline{EB}=u$，$\overline{BH}=v$，于是$\overline{AE}=2-u$，$\overline{CH}=2-v$. 设 OK 和 OM 分别是从正方形的中心 O 向 EH 和 BC 所作的垂线，EH 和 OM 的延长线交于 L. 因为 $\triangle AED\backsim\triangle CFH$，$\overline{AE}\cdot\overline{CH}=\overline{AD}\cdot\overline{FC}$，$(2-u)(2-v)=2$，或 $uv-2u-2v+2=0$. 由相似的$\triangle EBH$ 和$\triangle LKO$，可得$\overline{EH}\cdot\overline{KO}=\overline{BH}\cdot\overline{LO}$. 因为

$$\overline{LO}=1+\frac{u(1-v)}{v}=\frac{u+v-uv}{v},$$

$$\overline{KO}=\frac{v^2\left(\frac{u+v-uv}{v}\right)^2}{u^2+v^2}=\frac{(u+v-uv)^2}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2+v^2+uv(uv-2u-2v+2)}{u^2+v^2}$$

$$=1.$$

从而，O 到 EH 的距离等于 O 到正方形的边的距离，由此即得结论.

图 164

【评论】 考虑整个图形的正交射影，我们还可得到下列等价结论. 设 $ABCD$ 是一个椭圆的外切平行四边形，椭圆与各边相切于中点. 如果 F 是 DC 中点，H 在 BC 上且 E 在 AB 上，使 $FH\,/\!/\,DE$，则 EH 与这个椭圆相切.

问题 252 解法一：因为 $a\ln a=\ln b$，且 $b\ln b=\ln a$，所以

$$ab\ln b=a\ln a=\ln b.$$

因此

$$(\ln b)(ab-1)=0.$$

从而或者有 $\ln b=0$，在这种情况下，$b=1$ 且 $a=b^b=1^1=1$；或者 $a^{a+1}=1$. 在后一种情况下，a 必定等于 1.（否则，如果 a

是正数且不等于1，取以a为底的对数将导致$a+1=0$，这是不可能的.）因此两种情形下都有$a=b=1$.

解法二：由于$a^{ab}=b^b=1$，因此或者$a=1$，$b=1$，或者$ab=1$. 如果$a\neq 1$，$b\neq 1$，不妨设$a<1$，$b>1$，则$b=a^a<1$，与$b>1$矛盾.

问题 253 设x为所求的数，则存在某个整数y，使

$$x^2=10000y+9009.$$

因此x必定形如$10a\pm 3$. 所以

$$100a^2\pm 60a+9=10000y+9009,$$

从而

$$2a(5a\pm 3)=100(10y+9)\equiv 0 \pmod{25}.$$

由于$5a\pm 3$不是5的倍数，a一定是25的倍数. 记$a=25b$，则

$$b(125b\pm 3)=20y+18.$$

在$b(125b+3)=20y+18$的情形下，仅当左边最后一位数是8时，b才可能是解. 使y为整数的b的最小值是6：

$$6\times 753=20\times 225+18.$$

在$b(125b-3)=20y+18$的情形下，可知b一定以4或9作为它的末位数. 但当$b=4$时，y不是整数；而当$b=9$时，$y=504$.

因此最小的$b=6$，$x=250b+3=1503$，且$x^2=2259009$.

【评论】 利用同余式有一个更为系统的解法. 设x如上，有

$$x^2\equiv 259 \pmod{625}.$$

特别地，

$$x^2\equiv 259\equiv 4 \pmod 5.$$

所以$x\equiv 2$或$x\equiv 3 \pmod 5$. 在第一种情形下，令$x=5a+2$，得$25a^2+20a\equiv 255 \pmod{625}$或$5a^2+4a\equiv 51 \pmod{125}$. 解$5a^2+4a\equiv 51 \pmod 5$，可知存在某个$b$，使$a=5b-1$. 继续讨论可得$x\equiv\pm 253 \pmod{625}$. 由于$x^2\equiv 1 \pmod{16}$，一定有$x\equiv\pm 1 \pmod 8$. 于是

$$\begin{aligned} x&=625u+p=8v+r\\ &=5000w-624p+625r, \end{aligned}$$

其中$p=\pm 253$，$r=\pm 1$. 而这就意味着$x\equiv\pm 2247$或$\pm 1503 \pmod{5000}$，我们可由此选出合适的解.

【思考】 证明：以009009为尾数的最小平方数是$126503^2=16003009009$.

问题 254 设$\overline{AB}=a$，$\overline{FD}=b$. 易知

$$\overline{AE}=\frac{x}{\sin\alpha},\ \overline{EF}=\frac{x}{\sin\beta}.$$

从而

$$\overline{EB}=\frac{a\sin\alpha-x}{\sin\alpha},\ \overline{ED}=\frac{b\sin\beta-x}{\sin\beta}.$$

由$\overline{EB}\cos\alpha=\overline{ED}\cos\beta$，可得

$$\frac{a\sin\alpha-x}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{b\sin\beta-x}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

求解x得

$$x=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}.$$

问题 255 一个一般规律是：对$n=2,3,4,\cdots$，

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

证明一（数学归纳法）：$n=2$时结论显然成立. 假定$n=m$时结论成立，则当$n=m+1$时，

$$\begin{aligned} &\prod_{k=2}^{m+1}\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}\\ &=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{m(m+1)}\right]\left[\frac{1-\frac{1}{(m+1)^3}}{1+\frac{1}{(m+1)^3}}\right]\\ &=\frac{2}{3}\left(\frac{m^2+m+1}{m^2+m}\right)\left[\frac{m^3+3m^2+3m}{(m+2)(m^2+m+1)}\right]\\ &=\frac{2}{3}\left[\frac{m^2+3m+3}{(m+1)(m+2)}\right]\\ &=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right]. \end{aligned}$$

由数学归纳法可知结论成立.

证明二（直接证法）：我们知道

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

$$=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)\right]\cdot$$

$$\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k+1}\right).$$

因为

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k+1}$$

$$=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^2-(j+1)+1}$$

$$=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2+j+1},$$

所以上述乘积等于

$$\frac{2}{n(n+1)}\left[\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)\right]\cdot$$

$$\left(\prod_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

$$=\frac{2(n^2+n+1)}{n(n+1)3}=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

（如果理解上述乘积有困难，可对较小的数 n，比如 4 或 5，写出完整的式子，以帮助了解记号表达的含义.）

问题 256 显然

$$x^n-n(x-1)-1$$

$$=x^n-1-n(x-1)$$

$$=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-$$

$$n(x-1)$$

$$=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1-n).$$

第二个因式当 $x=1$ 时为 0，因此 $x-1$ 是它的一个因式. 证毕.

事实上，用 $(x-1)$ 对第二个因式施行"长除法"，可得

$$x^n-n(x-1)-1=(x-1)^2\cdot$$

$$[x^{n-2}+2x^{n-3}+\cdots+(n-2)x+n-1].$$

问题 257 因为表内的每一项都是它所在行和列的首数的和，所以这 6 项（没有两个同行或同列）的和恰好是最上面一行和最左边一列的数的和，即

$$(1+9+3+2+4+8)+$$

$$(2+7+3+5+8+7)=59.$$

问题 258 整个平面上的圆和六边形的放置模式是一致的（见图 165）. 因此所求的百分比就是圆与它的外切正六边形的面积之比：

$\frac{\pi}{6/\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ 或大约 91%.

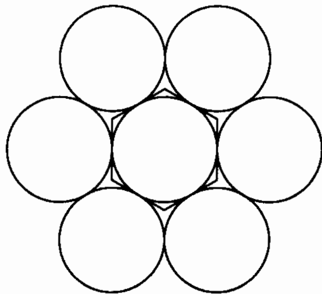


图 165

问题 259 由 $a+\sqrt{2}b=-\sqrt{3}c$，可得 $a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2=3c^2$，因此 $2\sqrt{2}ab=3c^2-a^2-2b^2$. 由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，必有 $ab=0$ 及 $3c^2-a^2-2b^2=0$.

如果 $a=0$，则 $3c^2=2b^2$，从而由 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 的无理性得 $b=c=0$. 如果 $b=0$，则 $3c^2=a^2$，由此亦可得 $a=c=0$.

【习题】 (1) 证明：使 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c+\sqrt{5}d=0$ 的仅有的整数 a、b、c、d 是 $a=b=c=d=0$；

(2) 对于 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c+\sqrt{6}d=0$，是否有类似的结论？

问题 260 注意到当 $xyz \neq 0$ 时，$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$ 等价于 $yz+xz+xy=0$，而这又等价于 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. 由于当

$$x=\frac{1}{b-c},\ y=\frac{1}{c-a},\ z=\frac{1}{a-b}$$

时最后一个条件成立，所以

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$
$$=\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2,$$

而括号中的数当然是有理数.

问题 261 如图 166，平面绕 C 按逆时针方向旋转 60°，使 A 落到 B 处，D 落到 E 处，从而也使 AD 落到 BE 处. 于是 M 落到 N 处. 因此 $\angle MCN=60°$ 且 $CM=CN$. 由此即得结论.

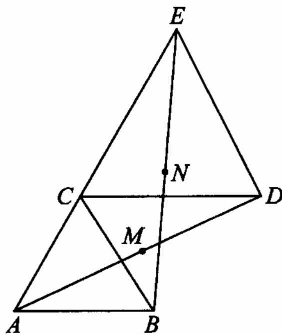


图 166

问题 262 以 $P(x)$ 表示给定的多项式，我们有

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)+(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6).$$

于是

当 $x>a_1$ 时 $P(x)>0$，

当 $a_2>x>a_3$ 时 $P(x)<0$，

当 $a_4>x>a_5$ 时 $P(x)>0$，

当 $a_6>x$ 时 $P(x)<0$.

由 $P(x)$ 的连续性(如图 167)，可知方程有三个不相等的实根.

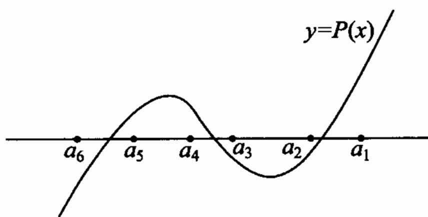


图 167

问题 263

$$\begin{aligned}&4n^3+6n^2+4n+1\\=&(n+1)^4-n^4\\=&[(n+1)^2-n^2][(n+1)^2+n^2]\\=&(2n+1)[(n+1)^2+n^2].\end{aligned}$$

问题 264 每行、每列及每条对角线上的元素的乘积都等于 k，特别地有

$$aei=beh=ceg=k,$$

于是 $a=\frac{k}{ei}$，$b=\frac{k}{eh}$，$c=\frac{k}{eg}$. 从而

$$k=abc=\frac{k}{ei}\cdot\frac{k}{eh}\cdot\frac{k}{eg}=\frac{k^3}{e^3ghi}=\frac{k^3}{e^3k},$$

即 $k=e^3$，是一个完全立方数.

问题 265

可能的罪犯	供词			
	安迪	鲍勃	卡尔	戴维
安迪	假	真	假	真
鲍勃	假	假	假	真
卡尔	真	真	假	真
戴维	假	真	真	假

由上表知，在情形(1)下，鲍勃是罪犯；在情形(2)下，卡尔是罪犯.

问题 266 假设存在这种投掷骰子的方式，则 11 个结果中每一个出现的可能性都是 $p=\frac{1}{11}$. 2 点只有在两粒骰子都显示 1 时才

能得到．同样，只有在两粒骰子都显示 6 时才能得到 12 点．

设两粒骰子出现 1 的概率分别为 u 和 v，出现 6 的概率分别为 x 和 y，则 $p=uv=xy$．要得到 7 点，可以是投掷出一个 1、一个 6，也可以是其他方式．所以，出现 7 点的概率

$$p > uy + vx = u\frac{p}{x} + \frac{p}{u}x$$

$$= p\left(\frac{u}{x} + \frac{x}{u}\right) \geqslant 2p.$$

（最后的不等式成立的理由是当 $a>0$ 时，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$．）

这个矛盾显示：不可能有一种投掷方式，使所有的结果都是等可能的．

【习题】 是否有一种投掷方式，使除了一种结果外，其他所有的结果都是等可能的？

问题 267 （1）回想当 $u\geqslant 0$ 时 $|u|=u$ 且当 $u\leqslant 0$ 时 $|u|=-u$，因此 $|u|=|-u|$．由此可知，由

$$|x|+|y|+|x+y|\leqslant 2 \qquad (1)$$

所确定的区域 R 是关于原点对称的，换言之，如果 $(a, b)\in R$，则也有 $(-a, -b)\in R$．所以只需对 $y\geqslant 0$ 时讨论(1)式．

在象限 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 中，我们有 $x+y\geqslant 0$，则(1)式化为 $x+y+(x+y)\leqslant 2$．R 在这一象限的部分由

$$0\leqslant x,\ 0\leqslant y,\ x+y\leqslant 1$$

所确定，即图 168 中的$\triangle AOB$．

在象限 $x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$ 中，有(i) $x+y\geqslant 0$ 或(ii) $x+y\leqslant 0$．如果是(i)，则 $-x+y+(x+y)\leqslant 2$，即 $y\leqslant 1$，从而有

$$x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0,$$

（连带有 $-1\leqslant x$）确定了$\triangle BOC$．如果是(ii)，则 $-x+y-(x+y)\leqslant 2$，即 $-1\leqslant x$，从而有

$$-1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y,\ x+y\leqslant 0,$$

（连带有 $y\leqslant 1$）确定了$\triangle COD$．

（事实上，连带的不等式显示

$$x\leqslant 0,\ 0\leqslant y,\ |x|+|y|+|x+y|\leqslant 2,$$

等价于

$$-1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 1,$$

从而确定了正方形 $OBCD$．）

R 的下半部分可以通过对上半部分（图 168）关于原点的反射得到（换言之，对图 168 中的区域绕 O 旋转）．如图 169，R 是面积为 3 的六边形．

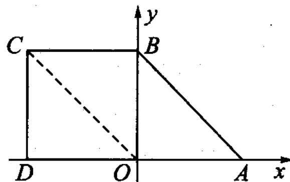


图 168

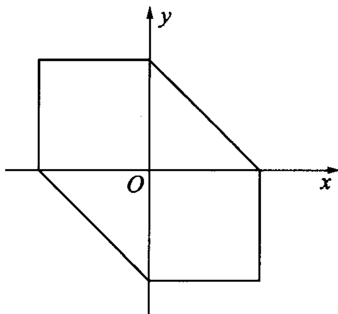


图 169

（2）分析与(1)相似，不过要讨论的情形更多．如前，由

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z|\leqslant 2 \qquad (2)$$

所确定的区域 R 关于原点 O 对称，即如果 $(a, b, c)\in R$，则也有 $(-a, -b, -c)\in R$．因此只需要考虑上半部分，即 $z\geqslant 0$ 的四个卦限．

下面只简略地讨论上面的四个卦限，而把细节留给读者．

如图 170，对 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，这些条件及(2)式等价于

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z\leqslant 1,$$

这确定了四面体 $OABC$，体积为 $\frac{1}{6}$．

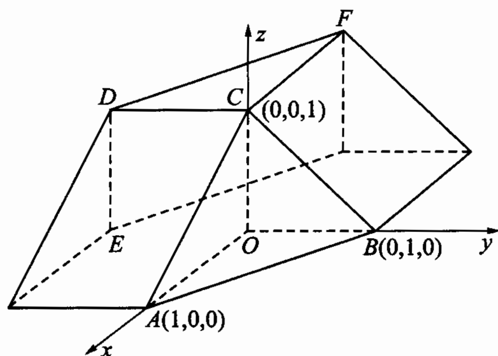


图 170

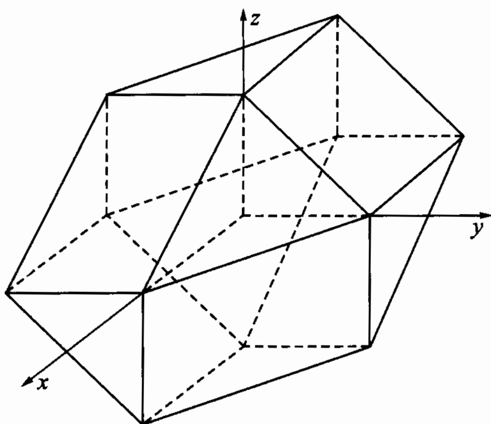


图 171

对 $x \geqslant 0$，$y \leqslant 0$，$z \geqslant 0$，这些条件及(2)式等价于

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant y \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant z, \ x+z \leqslant 1,$$

这确定了一个楔形(以 AD 作为一条长对角线的半个立方体)，体积为$\frac{1}{2}$.

对 $x \leqslant 0$，$y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$，这些条件及(2)式等价于

$$-1 \leqslant x \leqslant 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant z, \ y+z \leqslant 1,$$

这确定了一个楔形(以 BF 作为一条长对角线的半个立方体)，体积为$\frac{1}{2}$.

对 $x \leqslant 0$，$y \leqslant 0$，$z \geqslant 0$，这些条件及(2)式等价于

$$-1 \leqslant x \leqslant 0, \ -1 \leqslant y \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant z \leqslant 1, \ 1 \leqslant x+y,$$

这确定了一个楔形(以 EF 作为一条长对角线的半个立方体)，体积为$\frac{1}{2}$.

R 的下半部分可由上半部分关于 O 反射得到. 立体区域 R 见图 171，其体积为

$$2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{3}.$$

问题 268 解法一(利用容斥原理)：假定所有座位都是一样的，且以一人作为标志，若无任何限制，则有 5! ＝120 种不同的方式安排其余 5 人就座. 如果要求某一对指定夫妇坐在一起，则剩下的 4 个人就有 4! 种坐法. 而对每一种这样的坐法，我们总可以交换这一对夫妇的位子. 因此，使某一对指定的夫妇坐在一起的坐法共有 $2 \times 4! = 48$(种).

如果要求某两对指定的夫妇各自坐在一起，则有 $2^2 \times 3! = 24$(种)方法安排座位. 因为如果以一对夫妇作为标志，则另一对夫妇和其余两个人组成 3 个单位，共有 3! 种安排法.(因子 2^2 是由交换每一对夫妇的丈夫和妻子的位子而产生的.)

最后，有 $2^3 \times 2! = 16$(种)方法安排这 6 个人，使 3 对夫妇都坐在一起.

由容斥原理，没有一对夫妇坐在一起的坐法共有

$$120-3\times48+3\times24-16=32(\text{种}).$$

解法二：设这 3 对夫妇为(A, a)，(B, b)，(C, c). 以 A 作为标志. 图 172 显示了不同的就座类型，其中双箭头联结的是一对夫妇.

有 4 种方式使 B 或 b 坐在 A 的左边，也有 4 种方式使 B 或 b 坐在 A 的右边. 这种安排可由 8 种方式来实现，见图 172(a).

有 4 种方式使 A 坐在(B, b)之间，也有

4 种方式使 A 坐在 (C, c) 之间. 这种安排也可由 8 种方式来实现, 见图 172(b).

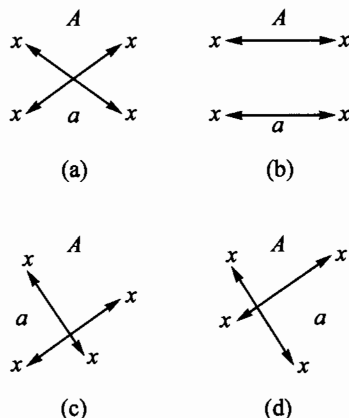


图 172

类似地, 图 172(c)和图 172(d)的类型也各可由 8 种方式来实现. 因此, 总共有 32 种使夫妇俩分开就座的方法.

【习题】 将 3 改为 n, 解决同样的问题.

问题 269 对任何一条路线, 总存在一条关于$\angle BAC$ 的平分线对称的路线, 而所用的时间只少不多. (这是因为任何一条路线 μ 必定要穿过角平分线至少一次. 设在 G 处穿过. 假定路线 μ 从 B 到 G 的部分所用的时间不比路线 μ 从 G 到 C 的部分所用的时间多, 则我们可将路线 μ 从 G 到 C 的部分用路线 μ 从 B 到 G 的部分的镜像来代替, 从而得到一条更好的路线 ν. 如果 μ 的后一部分所用的时间更短, 则可用类似的方法处理.)

因此我们只需考虑那些关于$\angle BAC$ 的平分线对称的路线. 由于两点之间沿直线的距离最短, 合适的路线是图 173 中所示的类型, 其中 $AD=AE$ 且 $BD=CE$. 设$\overline{BD}=x$. 因为 $\overline{AB}=p$, $\overline{BC}=q$, 考虑相似三角形$\triangle ADE$ 和$\triangle ABC$, 得

$$\overline{DE}=\frac{(p-x)q}{p}.$$

经过路线 $BDEC$ 所需的时间 $t(x)$ 为

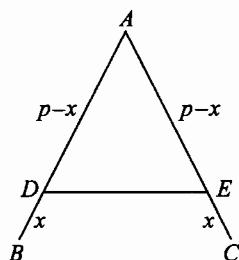


图 173

$$t(x)=\frac{2x}{v}+\frac{(p-x)q}{pw}$$
$$=\left(\frac{2}{v}-\frac{q}{pw}\right)x+\frac{q}{w}.$$

当 $\frac{2}{v}-\frac{q}{pw}\geqslant 0$ 时, t 是关于 x 的增函数, 所以当 $x=0$ 时 t 取最小值.

当 $\frac{2}{v}-\frac{q}{pw}\leqslant 0$ 时, t 是关于 x 的减函数, 所以当 $x=p$ 时 t 取最小值.

问题 270 解法一: 假定存在这样的多项式 $p(x)$. 注意到 $\ln x$ 是增函数(即当 $0<u<v$ 时, $\ln u<\ln v$), 且 $\ln x<x$(由 ln 函数的定义可知), 我们有

$$p(n)<n\ln n<n^2.$$

由此得多项式 $p(x)$ 的次数最多是 2. (最后一个判断的理由在此解法末尾的注中.)

显然 $p(n)$ 既非常数也非线性. 剩下需考虑的是 $p(x)$ 为二次函数的情形. 在这种情形下, 由 $p(1)=\ln 1=0$ 得

$$p(x)=(x-1)(ax+b).$$

计算在 $x=2$ 和 $x=4$ 时的值得

$$\ln 2=p(2)=2a+b,$$
$$\ln 24=p(4)=3(4a+b).$$

解得

$$a=\frac{1}{6}\ln 3,\ b=\ln 2-\frac{1}{3}\ln 3.$$

于是

$$p(x)=(x-1)\left(\frac{x\ln 3}{6}+\ln 2-\frac{1}{3}\ln 3\right).$$

从而

$$\ln 2+\ln 3=p(3)$$
$$=2\left(\frac{3\ln 3}{6}+\ln 2-\frac{1}{3}\ln 3\right),$$

由此导致 $3\ln 2=2\ln 3$，即 $2^3=3^2$，矛盾.

【注】 我们在此说明为什么一个次数 $m\geqslant 1$ 的多项式

$$p(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$$

具有性质：对充分大的 x，

$$|p(x)|>x^{m-1}.$$

首先将 $p(x)$ 写成以下形式：

$$p(x)=a_0x^m\left(1+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}\right).$$

取充分大的 x，可保证括号中的表达式大于$\frac{1}{2}$，这样就有

$$|p(x)|>\frac{1}{2}|a_0|x^m.$$

现在取足够大的 x，使$\frac{x|a_0|}{2}>1$，从而

$$|p(x)|>x^{m-1}.$$

由此推得，如果对足够大的 x 有 $p(x)<x^2$，则 $m\leqslant 2$.

解法二：设对 $n=1,2,3,$

$$\ln n!=p(n)=\sum_{r=0}^{m}a_rn^r\quad(a_m\neq 0),$$

则

$$\ln(n+1)!=\sum_{r=0}^{m}a_r(n+1)^r.$$

从而

$$\ln(n+1)=\sum_{r=0}^{m}a_r(n+1)^r-\sum_{r=0}^{m}a_rn^r,$$

它是一个次数$\leqslant m-1$ 的多项式. 由问题123知. $\ln x$ 不能表示成某个关于 x 的多项式 $f(x)$. 由此导致矛盾，结论得证.

【评论】 $\ln n$ 不是关于 n 的多项式的另一个证明简述如下. 由 $\ln n=b_rn^r+b_{r-1}n^{r-1}+\cdots+b_1n+b_0$，并取 $n=e^p$，得

$$p=b_re^{pr}+b_{r-1}e^{p(r-1)}+\cdots+b_0,$$

于是

$$\frac{p}{e^{pr}}=b_r+b_{r-1}e^{-p}+\cdots.$$

当 $p\to\infty$时，左边趋于 0，而右边则趋于 b_r，矛盾.

问题 271 先来看看对于较小的 n，$f(n)$的值是否会提供一些有用的信息(见表3).

表 3

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	3	8	22	65	209	732
$\frac{f(n+1)}{f(n)}$	3	$\frac{8}{3}\approx 2.66$	$\frac{22}{8}\approx 2.75$	$\frac{65}{22}\approx 2.95$	$\frac{209}{65}\approx 3.22$	$\frac{732}{209}\approx 3.50$	

德摩根(A. De Morgan)正在向一名保险精算师解释什么是某种人群在一给定时段结束时有一定存活比例的概率，他引用了那个含有 π 的精算公式。精算师问 π 是什么，他解释说这代表一个圆的周长与直径之比。这位一直在津津有味地听他解释的老朋友突然打断了他，大声喊道："我亲爱的朋友，一定是搞错了。一个圆怎么会跟一给定时段的存活人数有关呢？"

看起来$\frac{f(3)}{f(2)}=\frac{8}{3}$似乎是最小值，并且证明这一点的一条途径是证明当 $n=5$，6，7，…时 $\frac{f(n+1)}{f(n)}>3$. 事实上，当 $n\geqslant 6$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f(n+1) \\
&= 1^{n+1}+2^n+3^{n-1}+\cdots+n^2+(n+1) \\
&> 1^{n+1}+2^n+3^{n-1}+4^{n-2}+5^{n-3}+ \\
&\quad 6^{n-4}+\cdots+(n-1)^3+n^2 \\
&> 1^{n+1}+2^n+3^{n-1}+4^{n-2}+5^{n-3}+ \\
&\quad 3[6^{n-5}+7^{n-6}+\cdots+(n-1)^2+n] \\
&= 1^{n+1}+2^n+3^{n-1}+4^{n-2}+5^{n-3}+ \\
&\quad 3[f(n)-1^n-2^{n-1}-3^{n-2}-4^{n-3}-5^{n-4}] \\
&= 3f(n)+2(5^{n-4}-1)+2^{n-1}(2^{n-5}-1) \\
&> 3f(n).
\end{aligned}
$$

问题 272 有五种不同的(加括号)方法可解释 $a^{b^{c^d}}$，每一种都表示 a 的某个方幂：

$$a^{b^{c^d}};\ a^{(b^c)^d}=a^{b^{cd}};$$
$$(a^b)^{c^d}=a^{bc^d};\ ((a^b)^c)^d=a^{bcd};$$
$$(a^{(b^c)})^d=a^{b^c d}.$$

由于当 a、x、y 都大于 1 时，当且仅当 $x\leqslant y$ 时 $a^x\leqslant a^y$，我们须比较 bcd、$b^c d$、bc^d、b^{cd}、b^{c^d} 的大小.

注意到，对每一个自然数 $n\geqslant 2$，有

$$n\leqslant 2^{n-1}\leqslant b^{n-1}.$$

据此可得

$$bcd\leqslant b^c d\leqslant b^{cd}\leqslant b^{c^d},\ bcd\leqslant bc^d.$$

现只剩下$(b^c d,\ bc^d)$、$(bc^d,\ b^{cd})$和$(bc^d,\ b^{c^d})$三对值需要考虑. 由例子 $3^2\times 2>3\times 2^2$ 和 $2^2\times 3<2\times 2^3$ 可知，$b^c d$ 和 bc^d 不满足一般的不等式. 再如前面所讨论的，我们有 $bc^d\leqslant b^{c^d}$.

最后来证明 $bc^d\leqslant b^{cd}$. 对 d 应用数学归纳法. 当 $d=1$ 时，不等式显然成立. 如果当 $d=k$ 时，$bc^k\leqslant b^{ck}$，则

$$bc^{k+1}=cbc^k\leqslant cb^{ck}\leqslant b^c b^{ck}=b^{c(k+1)}.$$

【习题】 以上各式何时取等号？

问题 273 所给信息可用维恩图(Venn diagram)来很好地展示. 假定长方形中总共有 1000 个人(图 174).

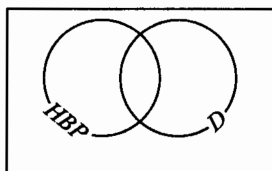


图 174

左边的圆 HBP 表示患有高血压的人群，右边的圆 D 表示饮酒的人群. 在 35 个有高血压的人中，有 $0.8\times 35=28$ 个饮酒，$35-28=7$ 个不饮酒. 如图 175，将 28 和 7 标上.

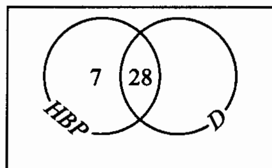


图 175

剩下的 $1000-35=965$ 个有正常血压的人分为两类：饮酒的有 $0.6\times 965=579$ 个，不饮酒的有 $965-579=386$ 个. 完整的图是图 176. 现在来计算饮酒的人群中患高血压的百分比：

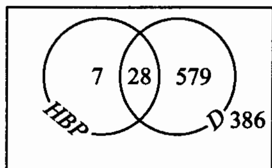


图 176

$$\frac{28}{28+579}\times 100\%=4.6\cdots\%.$$

问题 274 首先选取最后一个数 s_n，有三种可能：n、$n-1$、$n-2$. 选好 s_n 以后，在 n、

$n-1$、$n-2$、$n-3$ 中，除了 s_n 外又有三种可能选取 s_{n-1}. 依次类推，选好 s_n 和 s_{n-1} 以后，又有三种可能选取 s_{n-2}. 如此继续进行，对每一个 s_i，我们都有三个可能的选择，直到选好 s_3. 现只剩下 s_2 和 s_1 待选. 对 s_2，仅有 2 个可能的选择，而一旦 s_2 选好，s_1 就确定了. 所以满足条件的排列数为

$$\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{n-2\text{个}3}\times2\times1=3^{n-2}\times2!.$$

【习题】 如果条件变为：m 是在 1 和 n 之间的某个固定的数，则对所有的 $k=1, 2, \cdots, n$，各有多少种排列满足 $s_k\geqslant k-m$?

问题 275 解法一：因为 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\geqslant0$ 及 $a+b+c>d$，所以

$$\begin{aligned}&3(a^2+b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2)\\&\geqslant(a^2+b^2+c^2)+2(bc+ca+ab)\\&=(a+b+c)^2>d^2.\end{aligned}$$

解法二：考虑任意一个 $n+1$ 边形，不必是平面上的，也不必要求是不自交的，设其各边为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$. 由赫尔德不等式，对任意的 $m>1$，

$$(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)^{\frac{1}{m}}(1+1+\cdots+1)^{1-\frac{1}{m}}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立. 由推广的三角不等式，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant a_{n+1},$$

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant\frac{a_{n+1}^m}{n^{m-1}},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{a_{n+1}}{n}$ 时等号成立，在这种情况下，多边形是退化的.

当 $m=2$，$n=3$ 时，便得到问题中的情形.（参见问题 466.）

问题 276 设所取出的数是从小到大标记的：$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_8$. 如果以下 7 个整数：

$$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots, a_8-a_7,$$

其中没有 3 个是相同的，则至多有两个等于 1，至多有两个等于 2，等等. 因此

$$\begin{aligned}a_8-a_1=&(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\\&(a_4-a_3)+\cdots+(a_8-a_7)\end{aligned}$$

一定不小于 $1+1+2+2+3+3+4=16$. 另一方面，由于 $1\leqslant a_1<a_8\leqslant16$，

$$a_8-a_1\leqslant15,$$

与前面的假设矛盾.

事实上，下列更强的结论仍然成立：当 a_i 从小到大选取时，存在数 k，使 $a_i-a_{i-1}=k$ 有 3 个解.

问题 277 问题(i)和(ii)的答案都是否定的. 只要证明(ii)就足够了. 证明部分地依赖于这样的事实：完全平方数被 4 除的余数为 0 或 1. 据此，我们讨论模 4 的各种可能. 这样做的好处是仅有 3 种情形需要考虑：

(a) $k\equiv0 \pmod 4$；

(b) $k\equiv2 \pmod 4$；

(c) k 是奇数.

由情形(a)，对任意的整数 x 和 y，

$$x^2+kxy+y^2\equiv x^2+y^2 \pmod 4.$$

这意味着 $x^2+kxy+y^2$ 与两个整数的平方和相差一个 4 的倍数. 但是两个整数的平方和被 4 除的余数不可能是 3. 因此 $x^2+kxy+y^2$ 不可能取 $\{3, 7, 11, \cdots\}$ 中的任何值.

小家伙杰克·霍纳，
坐在角落里干嘛，
原来是计算根号无穷大。
这个活儿可把男孩们都打发，
于是噪声降到最低，
周围可就安静多啦。

H. Winson

由情形(b)，对任意的整数 x 和 y，

$$x^2+kxy+y^2\equiv x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \pmod 4.$$

因此 $x^2+kxy+y^2$ 被 4 除的余数一定是 0 或 1，所以不可能取{2，3，6，7，10，11，…}中的任何值.

现假设情形(c)成立，且 k 是奇数，则 $k\equiv\pm1 \pmod 4$，从而对任意的整数 x 和 y，

$$x^2+kxy+y^2\equiv x^2\pm xy+y^2 \equiv x(x\pm y)+y^2 \pmod 4.$$

当 y 是奇数时，y^2 是奇数，且 $x(x\pm y)$ 是偶数，所以 $x^2+kxy+y^2$ 是奇数. 另一方面，当 y 是偶数时，$x(x\pm y)$ 要么是奇数要么能被 4 整除，而 y^2 也能被 4 整除，所以 $x^2+kxy+y^2$ 是奇数或能被 4 整除.

这样，无论 y 是奇数还是偶数，$x^2+kxy+y^2$ 被 4 除不可能有余数 2，因此也就不可能是{2，6，10，14，…}中的一个值.

所以，不管 k 取何值，总存在某个正整数 n，使

$$x^2+kxy+y^2\neq n.$$

问题 278 有理根可写作 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p 和 q 为整数，且它们的最大公因数是 1. 因此 p 和 q 不可能同为偶数，且有

$$ap^2+bpq+cq^2=0.$$

假定 a、b、c 都是奇整数的可能性存在. 由于方程左边是偶数，因此它的三项中或者没有一项是奇数，或者恰有两项是奇数.

如果 p 和 q 都是奇数，则左边的每一项都是奇数，这不可能.

如果 p 和 q 中有一个，不妨设 p 是偶数，则 ap^2 和 bpq 都是偶数，而 cq^2 是奇数. 这也不可能.

所以 a、b、c 不可能都是奇数.

问题 279 假设三人的体重都不一样，并分别用他们名字的第一个字母 B、K、M 来表示他们的体重，则他们的陈述可写作

巴尔博：$B>K$，$K>M$.

克拉姆金：$M>K$，$M>B$.

莫泽：$K>M$，$M=B$.

由于每个人都作了两个陈述，则最轻的人的两个陈述都正确，最重的人的两个陈述都错误，而其余那个人只对了一个.

莫泽的陈述($M=B$)是不正确的，所以他不是最轻的. 巴尔博也不是最轻的，否则他的陈述 $B>K$ 就不对了. 巴尔博也不是最重的，否则 $B>K$ 就是正确的. 所以巴尔博按体重排处于中间. 这就给出了次序 $M>B>K$.

由于题目中并没有告诉我们两个体重相同的人所作的陈述的正确性如何比较，因此有可能至少有两个人的体重是相同的. 在这种情形下，所有可能的 7 个排序：$K=M=B$，$K>M=B$，$M=B>K$，$B>K=M$，$K=M>B$，$M>K=B$，$K=B>M$ 中，只有前两个($K=M=B$ 和 $K>M=B$)是合适的次序关系.

问题 280 对每一个 x 和 y，$f(x, y)=kf(y, x)=k\cdot k\cdot f(x, y)=k^2f(x, y)$. 由于存在 x 和 y 的值使 $f(x, y)\neq 0$，k^2 必等于 1，所以 $k=1$ 或 $k=-1$.

当 $k=1$ 时的例子是 $f(x, y)=x+y$；当 $k=-1$ 时的例子是 $f(x, y)=x-y$.

【习题】 对三个变量的多项式 $f(x, y, z)$，按条件 $f(x, y, z)=kf(y, z, x)$ 解决同样的问题.

问题 281 求解的关键是首先要对两个相对的顶点求出到这两点距离之和最小的点. 如果 A 和 C 是两个顶点，P 是线段 AC 上的任一点，Q 是不在 AC 上的任一点(见图 177)，则由三角不等式得 $\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{AC}<\overline{AQ}+\overline{QC}$. 这启发我们，所求的点应是两条对角线的交点. 事实上，设四个顶点为 A、B、C、

D，且 AC 和 BD 交于 P，则对任一点 Q，

图 177

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}=\overline{AC}+\overline{BD}$$
$$\leqslant\overline{AQ}+\overline{CQ}+\overline{BQ}+\overline{DQ},$$

当且仅当 $P=Q$ 时等号成立.

【习题】 对非凸的四边形(如图 178 中的四边形 $ABCD$)解决同样的问题.

图 178

问题 282 更一般地，设该地的纬度为 λ，北极圈的纬度为 α. 设 $\lambda\leqslant\alpha$(α 是 $66°33'$). 图 179 中，O 为地球的中心. 如果 r 是地球的半径，则有

图 179

$$\overline{OA}=r\sin\lambda,\quad \overline{AE}=r\cos\lambda,$$
$$\overline{OC}=r\sin\alpha,\quad \overline{CD}=r\cos\alpha.$$

因此

$$\overline{AB}=\frac{r\sin\lambda}{r\sin\alpha}r\cos\alpha=\frac{r\sin\lambda}{\tan\alpha}.$$

那么，地面上纬度 λ 处的一点处于太阳照射下的时间的比例是多少呢？该点在太阳照射下的时间是从它在 F 处的时刻起直至到达 G 处的时刻为止(见图 180). 假定地球的自转是匀速的，那么这就等于短弧 $\overset{\frown}{FG}$ 的长与地球横切面的周长之比，或 $\angle GAF$ 与 2π 之比.

图 180

因为 $\angle GAF=2\arccos\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$，所以在北纬 λ 处的一点处于太阳照射下的时间是

$$\frac{24}{2\pi}\cdot 2\arccos\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}=\frac{24}{\pi}\arccos\frac{\tan\lambda}{\tan\alpha}(\text{时}).$$

当 $\alpha=66°33'$，$\lambda=43°45'$ 时，这大约是 8 小时 45 分钟.

问题 283 如图 181，记梯形被它的对角线所分成的四个三角形的面积为 A、B、C、D. 如果一条对角线分另一条对角线的比为 $\dfrac{u}{v}$ (如图所示)，则

图 181

$$\frac{C}{B}=\frac{A}{D}=\frac{u}{v},$$

从而 $A\cdot B=C\cdot D$. 由于夹在两条平行线之间且具有同一底边的两个三角形的面积相等，有 $A+C=A+D$，因此 $C=D=\sqrt{AB}$，所以梯形的面积为

$$\begin{aligned}A+B+C+D&=A+B+2\sqrt{AB}\\&=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2.\end{aligned}$$

【习题】 给定一个四边形，按上图字母标记其中的三角形. 如果它的面积等于$(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$，这个四边形一定是梯形吗?

问题 284 先看 $n=2$ 的情形，以便由此得到一些启发. 我们要求 1，2，3，…，96，97，98，99 的所有数字之和. 从最大的数起往下看. 99 的两个数字的和是 18；98 的两个数字的和是 17，加上 1 等于 18；97 的两个数字的和是 16，比 18 少 2. 当我们看 80～89 的数时，例如注意到 87 的两个数字的和比 18 少 1+2，而 1+2 正好是 99－87＝12 的两个数字之和. 这使我们想到要把 0 添加到这 99 个数的集合中去，然后再两两配对为(0，99)，(1，98)，(2，97)，…，(12，87)，…，(32，67)，…，(48，51)，(49，50)，每一对的和都为 99. 一共有 50 对，且每一对中的两个数的数字的和都是 9+9=18. 因此 $n=2$ 时的答案为

$$9\times2\times50=900.$$

对一般情形，将 k 和 10^n-1-k 配对 $(k=0,1,2,\cdots,5\times10^{n-1}-1)$，则正如每一对中的两个数的十位上的数字或其他数位上的数字的和为 9 一样，每一对中的两个数的各个数位上的数字的和都是 9. 因为每一对中的数最多恰有 n 个数位，所以每一对中的两个数的数字的和是 $9n$. 由于总共有$\frac{1}{2}\times10^n$ 个数对，因此所有这些数的数字的和是

$$\frac{9n\cdot10^n}{2}=5\cdot9n\cdot10^{n-1}=45n\cdot10^{n-1}.$$

问题 285 解法一：如图 182，问题的关键是要求出阴影部分的$\triangle AGC$ 的高. 为此，二等分直角$\angle ABC$，角平分线过 G 且垂直于 AC，现求$\overline{GD}$.

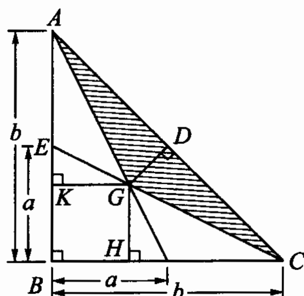


图 182

如图，设 $GH\perp BC$，以 x 表示$\overline{GH}$. 因为$\frac{\overline{GH}}{\overline{HC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$，

$$\frac{x}{b-x}=\frac{a}{b},$$

因此

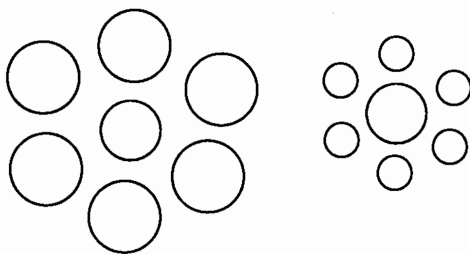
$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

所以

$$\overline{GD}=\overline{BD}-\overline{BG}=\frac{b}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}x,$$

错　觉

这里两个位居中央的圆圈，哪一个显得比较大?



从而$\triangle AGC$的面积为

$$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{GD}=\frac{1}{2}\sqrt{2}b\left(\frac{b}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}x\right)$$
$$=\frac{b}{2}(b-2x)=\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{2a}{a+b}\right)$$
$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right).$$

解法二：图与记号如解法一，则我们有

$$S_{\triangle AGC}$$
$$=S_{\triangle ABC}-2S_{\triangle GBC}$$
$$=\frac{b^2}{2}-xb=\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{2a}{a+b}\right)=\frac{b^2}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right).$$

问题 286 正五边形中任意 9 个点都可以！(自己作图.)

问题 287 解法一：当$x=0$，$y=0$或$x=-y$时，表达式的值为零. 从而由因子定理，x、y和$x+y$都是多项式的因子. 这也可由$x+y$整除x^7+y^7直接得出. 因此，

$$(x+y)^7-(x^7+y^7)$$
$$=(x+y)[(x+y)^6-(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)]$$
$$=(x+y)(7x^5y+14x^4y^2+21x^3y^3+14x^2y^4+7xy^5)$$
$$=7xy(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)$$
$$=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

解法二：如上可知，x、y和$x+y$都是多项式的因子. 设$x=\omega y$，这里ω是"虚的单位立方根"(即$\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$). 则

$$(x+y)^7-(x^7+y^7)$$
$$=y^7(\omega+1)^7-y^7(\omega^7+1)$$
$$=y^7(-\omega^2)^7-y^7(\omega+1)$$
$$=-y^7(\omega^{14}+\omega+1)$$
$$=y^7(\omega^2+\omega+1)=0.$$

因此$x-\omega y$是多项式的一个因子. 事实上，还不止如此. 设

$$g(x)=(x+y)^7-x^7-y^7,$$

则

$$g'(x)=7[(x+y)^6-x^6],$$

且

$$g'(\omega y)=7y^6[(\omega+1)^6-\omega^6]$$
$$=7y^6[(-\omega^2)^6-\omega^6]$$
$$=0,$$

因此$x-\omega y$是$g'(x)$的一个因子. 所以$(x+y)^7-(x^7+y^7)$能被$(x-\omega y)^2$整除. 由于多项式的系数都是实数，$(x+y)^7-(x^7+y^7)$也能被$(x-\omega y)^2$的复共轭$(x-\omega^2y)^2$整除. 因此

$$(x-\omega y)^2(x-\omega^2y)^2=(x^2+xy+y^2)^2$$

是多项式的一个因子. 由此即得结论.

【习题】 对n的其他整数值研究$(x+y)^n-(x^n+y^n)$的因式分解.

问题 288 解法一：由

$$BC/\!/FH,\ CD/\!/HK,\ DE/\!/KG,$$

得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}}.$$

于是$AFHKG$是$ABCDE$的关于定点A的位似变换的"压缩". 因此$AFHKG$与$ABCDE$相似，所以$AFHKG$是正五边形.

解法二：由$\angle BAE=108°$及$\overline{AB}=\overline{AE}$，得$\angle ABE=\angle AEB=36°$. 类似地有$\angle BAC=\angle EAD=36°$，因此$\angle CAD=36°$.

由$FH/\!/AD$，得$\angle FHA=\angle CAD=36°$. 又由$\angle ABE=\angle BAC=36°$，得$\angle BHA=108°$，于是$\angle FHB=\angle HFB=72°$，从而$\angle AHK=72°$.

类似地，$\angle AKH=72°$. 由等腰三角形得，$\overline{BF}=\overline{BH}=\overline{AH}=\overline{AK}$，所以$\triangle BFH\cong\triangle AHK$. 因此$\overline{FH}=\overline{HK}$. 显然$\overline{AF}=\overline{FH}$. 类似地有$\overline{AG}=\overline{GK}=\overline{HK}$.

这样，五边形$AFHKG$的各边各角都相等，因此是个正五边形.

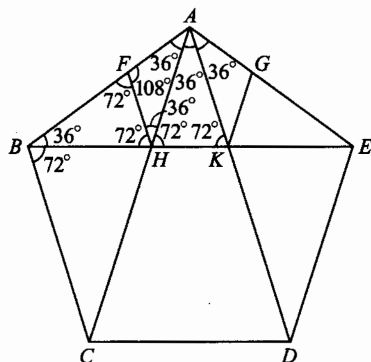


图 183

问题 289 假设

$$\begin{array}{r} T\ H\ R\ E\ E \\ +\quad F\ I\ V\ E \\ \hline E\ I\ G\ H\ T \end{array}$$

有解. 因为 T 和 E 不同，所以一定有一个 1 进位到最左边的一列上去. 因此 $E=T+1$. 看右边的一列. 由于 $E>T$，$E+E$ 一定大于 10，所以

$$E+E=10+T=9+E.$$

从而 $E=9$，且 $T=8$. 再看前一列，考虑到由右边进位过来的 1，得

$$1+9+V=10+H.$$

由此可得 $V=H$. 与已知条件 $V\neq H$ 矛盾.

问题 290 设 d 是 a、b、c 的最大公因数，g 是 x、y、z 的最大公因数. 因为 d 整除 b 和 c，所以 d 一定整除 x. 同样，d 也一定整除 y 和 z. 因此作为 x、y 和 z 的一个公因子，d 不超过 g. 另一方面，由于 g 整除 x，g 一定整除 b 和 c；由于 g 整除 y，g 一定整除 a 和 c. 因此 g 一定整除 a、b 和 c. 所以 $g\leqslant d$. 从而 $g=d$.

问题 291 $13\frac{1}{2}$天.

【习题】 更为常见的是，在这种情形下，总存在着某种限制因素，极大地影响着大种群的增长. 比如，我们可假定，如果 N 是某一时刻的种群个体的数量，则 12 小时以后，个体数量是 $N\left(2-\frac{N}{K}\right)$，其中 K 是某个常数.

是否存在常数 K，可以防止一个具有 1 000 000 个个体的种群增长为一个具有 2 000 000 个个体的种群? 如果这样的常数存在，则其最大值又是什么? 为了使培养皿中的细菌数量在 24 小时内由 1 000 000 增长到2 000 000，则增长公式所允许的值 K 又是什么?

问题 292 f 的条件可表述为：如果 $a\neq b$，则

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0.$$

首先来找出一个解. 观察方程的形式，不妨设 $x=c-f(u)$，其中 u 待定. 于是 $f(u)=f(c-f(u)+f(c))$，显然 $u=c$ 满足要求.

于是

$$x=c-f(c)$$

是一个解.

是否还有别的解呢? 假设 $x=v\neq c-f(c)$是另一个解. 根据 f 的条件及 $v+f(c)\neq c$ 的事实，我们有

$$\frac{f(v+f(c))-f(c)}{v+f(c)-c}\geqslant 0. \qquad (*)$$

然而，由于 v 是方程的一个解，$f(v+f(c))=c-v$,所以 $f(v+f(c))-f(c)=-(v+f(c)-c)$. 于是由($*$)式推出 $-1\geqslant 0$. 因此方程无第二个解.

问题 293 解法一：如图 184，连 AE. 因为 $\overline{AF}=2\,\overline{CF}$，$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle FEC}$. 同样有

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABE}&=S_{\triangle AEC} \\ &=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle EFC}=3S_{\triangle EFC}, \end{aligned}$$

因此

$$S_{ABEF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AEF}=5S_{\triangle FEC}.$$

解法二：设 X 和 Y 分别是由 F 和 A 向 BC

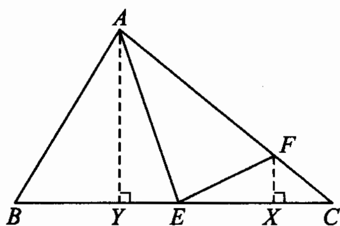


图 184

所引垂线的垂足，见图 184. 由于$\triangle AYC \backsim \triangle FXC$，$\overline{AY}=3\ \overline{FX}$. 因此

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AEC}=2\cdot 3S_{\triangle FEC}=6S_{\triangle FEC},$$

从而 $S_{ABEF}=5S_{\triangle FEC}$.

问题 294

$$\begin{aligned}&(\log_3 169)\times(\log_{13}243)\\=&(2\log_3 13)\times(5\log_{13}3)\\=&10\log_3 13\times\log_{13}3=10.\end{aligned}$$

【习题】 分析下面的“证明”过程：

设 $a=\log_3 169$，$b=\log_{13}243$，则 $3^a=169$，$13^b=243$. 据此 $169-13^b+243-3^a=0$，于是 $13^2-13^b+3^5-3^a=0$. 因此 $b=2$，$a=5$ 且 $ab=10$.

问题 295 解法一：如图 185，延长 BA 到 D，使$\overline{AD}=c$. 显然$\triangle AA_1A_2 \cong \triangle ACD$，我们有

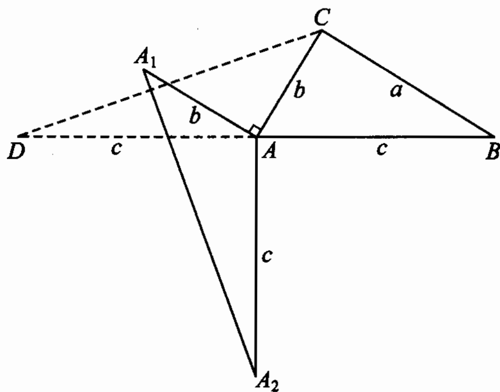


图 185

$$S_{\triangle AA_1A_2}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}ab.$$

类似地，有 $S_{\triangle BB_1B_2}=\frac{1}{2}ab$. 当然也有 $S_{\triangle CC_1C_2}=\frac{1}{2}ab$. 这个六边形的面积为

$$a^2+b^2+c^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)=2(a^2+ab+b^2).$$

解法二：$\triangle AA_1A_2$ 的面积可由三角函数求得. 由于

$$\angle A_1AA_2+\angle CAB=180^\circ,$$

这个三角形的面积等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\overline{AA_1}\cdot\overline{AA_2}\sin\angle A_1AA_2\\=&\frac{1}{2}bc\sin\angle CAB=\frac{bc}{2}\cdot\frac{a}{c}\\=&\frac{1}{2}ab.\end{aligned}$$

类似地，$\triangle BB_1B_2$ 的面积是$\frac{1}{2}ab$. 以下的推导同解法一.

【习题】 当$\triangle ABC$ 不是直角三角形时，$\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$ 和$\triangle CC_1C_2$ 的面积必定相等吗？

问题 296 设这三个数为 a、b、c 且 $a<b<c$，只要证明 $c^2=a^2+b^2$ 即可. 取 $a=6\times10^{n+2}$，$b=1125\times10^{2n+1}-8$ 及 $c=1125\times10^{2n+1}+8$，我们有

$$\begin{aligned}&a^2+b^2\\=&36\times10^{2n+4}+(1125\times10^{2n+1})^2-\\&18000\times10^{2n+1}+64\\=&(36000-18000)10^{2n+1}+\\&(1125\times10^{2n+1})^2+64\\=&(1125\times10^{2n+1})^2+18000\times10^{2n+1}+64\\=&c^2.\end{aligned}$$

得证.

问题 297 两位选手，不妨称他们为 A 和 B，如何才能在比赛中相遇呢？这有两种可能：(a)他们在第一轮中被分在同一组，或

(b)两人都参加了第一轮比赛并且赢了各自的对手从而进入下一轮，并且总是留在能继续进行比赛的那一半选手中(直到两人相遇). 这两种情形是互斥的.

考虑情形(a),从 A 的角度来看. 如果对手的选择是无偏倚的，则 A 在这轮比赛中与 B 相遇的机会同与任何别的选手相遇的机会是一样的. 因此，如果有 n 位选手参加比赛，则 A 与 B 在第一轮中相遇的概率是 $\frac{1}{n-1}$.

如果情形(b)出现，则问题转化为考虑一半选手参与比赛的同样情形. 因此我们可以将 32 位选手的问题转化为考虑 16 位选手的同样问题，然后是 8 位选手，再后是 4 位选手，最后是 2 位选手.

基于上面的分析，对 $k=1,2,3,4,5$，设 p_k 是 A 和 B 在 2^k 位选手中相遇的概率.

如果 $k=1$，这时仅有两位选手，即 A 和 B，他们必然相遇. 因此 $p_1=1$.

如果 $k=2$，则此时有 4 位选手，A 和 B 在首轮中有 $\frac{1}{3}$ 的机会相遇. 不然，他们将与不同的对手(对手的实力与他们俩不分上下)对抗，且获胜概率相同. 在首轮中，他们全部幸存的概率是 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 而在接下来的一轮中，由于他们是仅有的选手，必然相遇. 因此

$$p_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{2}$$

$\left(\text{其中}\frac{2}{3}\text{是他们在首轮中不相遇的概率}\right)$.

现在，设 $k\geqslant 2$. 这时有 2^k 位选手，且 A 与 B 在首轮中相遇的概率为 $\frac{1}{2^k-1}$. 因此，他们有 $\frac{2^k-2}{2^k-1}=\frac{2(2^{k-1}-1)}{2^k-1}$ 的概率与不同的对手对抗，且有 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 的概率淘汰对手. 当他们俩都在首轮的 2^{k-1} 位幸存选手中时，他们有 p_{k-1} 的概率相遇. 这样，

$$p_k=\frac{1}{2^k-1}+\frac{2(2^{k-1}-1)}{2^k-1}\cdot\frac{1}{4}p_{k-1},$$

由此得 $2(2^k-1)p_k=2+(2^{k-1}-1)p_{k-1}$. 因此

$$\begin{aligned}
&2^k(2^k-1)p_k\\
&=2^k+2^{k-1}(2^{k-1}-1)p_{k-1}\\
&=2^k+2^{k-1}+2^{k-2}(2^{k-2}-1)p_{k-2}\\
&\quad(\text{继续对 } k \text{ 递推})\\
&=2^k+2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2\cdot 1\cdot p_1\\
&=2(2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1)\\
&=2(2^k-1),
\end{aligned}$$

所以

$$p_k=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

特别地，所求的在 32 位选手中 A 和 B 相遇的概率为 $\frac{1}{16}$.

问题 298 解法一：(约翰·尹)假定这样的构作已经将角三等分了(见图 186). 设 $\angle POC=x$，则 $\angle COQ=2x$. 设点 D 是点 C 关于直线 OP 的反射像，且 M 在 OQ 上，使 $\overline{OM}=\overline{OC}$. 易证

$$\triangle ACD\cong\triangle ABC \text{ 及 } \triangle OCD\cong\triangle OMC,$$

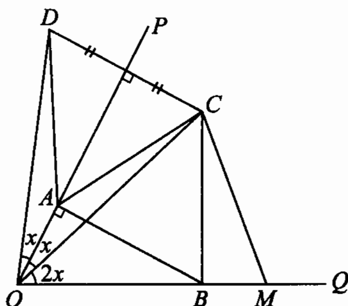


图 186

因此

$$\overline{CB}=\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{CM},$$

且

$$\angle CBM=\angle CMB.$$

同时可得

$$\angle CBM = 2x + (30^\circ + x) = 30^\circ + 3x,$$

$$\angle CMB = \angle OCM = \frac{1}{2}(180^\circ - 2x) = 90^\circ - x.$$

因此 $30^\circ + 3x = 90^\circ - x$，于是 $x = 15^\circ$. 从而必有$\angle POQ = 45^\circ$.（参见 *Crux Mathematicorum* 7 (1981)：100−101.）

解法二：设$\alpha = \angle AOC$及$\beta = \angle COB$. 则$0 < \alpha$、$\beta \leqslant 90^\circ$且$\alpha + \beta < 90^\circ$. 如图187标记其余的角. 又设$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC} = a$，$\overline{OB} = b$，$\overline{OC} = c$. 分别对$\triangle OBC$和$\triangle AOB$应用正弦定理得：

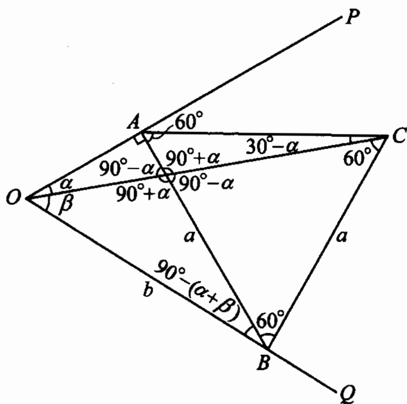


图 187

$$\frac{\sin \beta}{\sin (30^\circ + \alpha)} = \frac{a}{b},$$

且

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{a}{b},$$

从而

$$\sin \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (30^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}[\cos (30^\circ - \beta) - \cos (30^\circ + 2\alpha + \beta)]. \quad (1)$$

再分别对$\triangle OBC$和$\triangle OAC$应用正弦定理得

$$\frac{\sin \beta}{\sin (150^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{a}{c},$$

且

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 150^\circ} = \frac{a}{c},$$

从而

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin \alpha}{\sin 150^\circ} = \frac{\sin \beta}{\sin (150^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin (30^\circ + \alpha + \beta)},$$

利用$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$得

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha \sin (30^\circ + \alpha + \beta) = \cos (30^\circ + \beta) - \cos (30^\circ + 2\alpha + \beta). \quad (2)$$

由(1)式和(2)式得

$$2 \cos (30^\circ + \beta) - 2 \cos (30^\circ + 2\alpha + \beta) = \cos (30^\circ - \beta) - \cos (30^\circ + 2\alpha + \beta),$$

或

$$\cos (30^\circ + 2\alpha + \beta) = 2 \cos (30^\circ + \beta) - \cos (30^\circ - \beta). \quad (3)$$

假定题中的方法确实给出了$\angle POQ$的三等分，则$2\alpha = \beta$，且等式(3)化为

$$\cos (30^\circ + 2\beta) = 2 \cos (30^\circ + \beta) - \cos (30^\circ - \beta),$$

或

$$\cos (30^\circ + 2\beta) - \cos (30^\circ + \beta) = \cos (30^\circ + \beta) - \cos (30^\circ - \beta),$$

或

$$-2 \sin \left(30^\circ + \frac{3\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2} = -2 \sin 30^\circ \sin \beta = -2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

由此得$\beta = 0^\circ$或$\sin \left(30^\circ + \frac{3\beta}{2}\right) = \cos \frac{\beta}{2} = \sin \left(90^\circ \pm \frac{\beta}{2}\right)$. 因此$\beta = 0^\circ$，$30^\circ + \frac{3\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$或$30^\circ + \frac{3\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$，于是得三种可能：

$$\alpha = \beta = 0^\circ,$$
$$\alpha = 15^\circ, \beta = 30^\circ,$$
$$\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ.$$

反之，可以证明上述三种情形都满足等式(3)．因此仅有的可用这种方法三等分的锐角$\angle POQ$ $(=\alpha+\beta)$是45°．

解法三：在图188中，设D为由C向OA的延长线所作垂线的垂足，M为由C向AB所作垂线的垂足．设$\overline{OA}=2c$，$\angle AOC=\alpha$，$\angle BOA=\gamma$．则$\overline{AB}=2c\tan\gamma$，从而

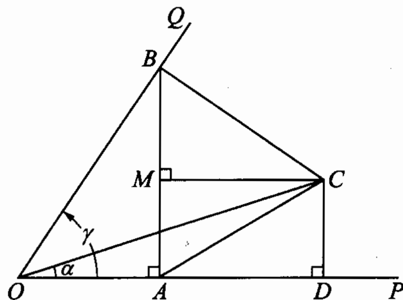


图 188

$$\overline{CD}=\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=c\tan\gamma.$$

于是

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\frac{c\tan\gamma}{2c+c\sqrt{3}\tan\gamma}=\frac{\tan\gamma}{2+\sqrt{3}\tan\gamma}.$$

假定这种构作确实使OC三等分$\angle BOA$，即$\gamma=3\alpha$．则由于

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha},$$

有

$$\tan\alpha=\frac{\tan 3\alpha}{2+\sqrt{3}\tan 3\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{2-6\tan^2\alpha+3\sqrt{3}\tan\alpha-\sqrt{3}\tan^3\alpha}.$$

令$x=\tan\alpha$并消去x，得方程

$$1+5x^2=\sqrt{3}(3x-x^3).$$

以$x=\sqrt{3}y$代入去掉根号得

$$1+15y^2=9y-9y^3,$$

或

$$3y(3y^2+5y-3)+1=0.$$

如果存在有理根，则3一定整除简分数中的分母．从而，如果令$y=\frac{z}{3}$，则

$$z^3+5z^2-9z+3=0.$$

由于$z^3+5z^2-9z+3=(z-1)(z^2+6z-3)$，得$z=1$，$-3+2\sqrt{3}$或$-3-2\sqrt{3}$，进而得$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$2-\sqrt{3}$或$-2-\sqrt{3}$．其中$x$的第三个值是负值，不合题意．因此我们知道此方法仅对

$$\tan\alpha=0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ 或 }2-\sqrt{3}$$

可行，相应的角是$\alpha=0°$，30°或15°；$\gamma=0°$，90°或45°．

问题 299　设有k个1．则这个二进制表示的数为

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}=2^k-1.$$

其平方是

$$\begin{aligned}(2^k-1)^2&=2^{2k}-2^{k+1}+1\\&=2^{k+1}(2^{k-1}-1)+1\\&=2^{k+1}(2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+1)+1\\&=2^{2k-1}+2^{2k-2}+\cdots+2^{k+1}+1.\end{aligned}$$

在二进制中，这个平方数的表示为

$$\underbrace{111\cdots1}_{k-1\text{个}1}\underbrace{000\cdots0}_{k\text{个}0}1.$$

问题 300　在处理一般情形之前，我们来看看最初的几个情形，以便对问题有所了解．对$k=1$，2和3，相应的等式是

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{3\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

这些都是容易证明的．

现在证明$k=4$时的情形．等式左边是$\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$．注意到

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8},$$

从而表达式化为

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

于是方程对 $k=4$ 成立.

当 $k=5$ 时，等式左边是

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{10}.$$

在这种情形下，尝试着用 $\cos\frac{4\pi}{10}$ 替换 $\sin\frac{\pi}{10}$，并用 $\cos\frac{2\pi}{10}$ 替换 $\sin\frac{3\pi}{10}$，似乎都没有特别的作用. 不过，通过观察恒等式

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{4\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{10}$$
$$=\cos\frac{4\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10},$$

我们发现，也许可以对等式加以改造，以便使用公式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

于是(注意到 $\sin\frac{5\pi}{10}=1$)，有

$$\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{2\pi}{10}\sin^2\frac{3\pi}{10}\sin^2\frac{4\pi}{10}$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\right)\times$$
$$\left(\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(\sin\frac{4\pi}{10}\cos\frac{4\pi}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2^4}\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$$
$$=\frac{1}{2^4}\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$$
$$=\frac{1}{2^4}\sin^2\frac{2\pi}{10}\sin^2\frac{4\pi}{10}.$$

化简后得 $\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{2^4}$，由此得 $k=5$ 时等式成立.

下面看一般的情形. 设

$$A=\sin\frac{\pi}{2k}\sin\frac{2\pi}{2k}\sin\frac{3\pi}{2k}\cdots\sin\frac{(k-1)\pi}{2k},$$

由于 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，且当 $r=1, 2, 3, \cdots, k-1$ 时，

$$\sin\frac{r\pi}{2k}=\cos\left((k-r)\frac{\pi}{2k}\right),$$

$$A^2=\left(\sin\frac{\pi}{2k}\cos\frac{\pi}{2k}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{2k}\cos\frac{2\pi}{2k}\right)$$
$$\times\cdots\times\left[\sin\frac{(k-1)\pi}{2k}\cos\frac{(k-1)\pi}{2k}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{k-1}}\sin\frac{\pi}{k}\sin\frac{2\pi}{k}\sin\frac{3\pi}{k}\cdots\sin\frac{(k-1)\pi}{k}$$
$$=\frac{1}{2^{k-1}}\sin^2\frac{\pi}{k}\sin^2\frac{2\pi}{k}\cdots\sin^2\frac{\left[\frac{k}{2}\right]\pi}{k}$$

$\left(\text{因为当 } s=1, 2, \cdots, \left[\frac{k}{2}\right]\text{时，}\sin\frac{(k-s)\pi}{k}=\sin\frac{s\pi}{k}\right)$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}\sin^2\frac{2\pi}{2k}\sin^2\frac{4\pi}{2k}\cdots\sin^2\frac{2\left[\frac{k}{2}\right]\pi}{2k}.$$

从 A^2 的两个表达式中消去 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 个因子 $\sin^2\frac{2r\pi}{2k}\left(r=1, 2, \cdots, \left[\frac{k}{2}\right]\right)$，则当 k 是偶数时，

$$\sin^2\frac{\pi}{2k}\sin^2\frac{3\pi}{2k}\cdots\sin^2\frac{(k-1)\pi}{2k}=\frac{1}{2^{k-1}};$$

当 k 是奇数时，

$$\sin^2\frac{\pi}{2k}\sin^2\frac{3\pi}{2k}\cdots\sin^2\frac{k\pi}{2k}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

由于

$$2\left[\frac{k+1}{2}\right]-1=\begin{cases}k-1 & (k\text{ 为偶数}),\\ k & (k\text{ 为奇数}),\end{cases}$$

由此即得结论.

问题 301 (1) 由于 $\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{11}{110}=\frac{1}{10}$，及 $\frac{1}{41}+\frac{1}{1640}=\frac{41}{1640}=\frac{1}{40}$，右边等于

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)$$
$$=\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1,$$

> 发现，在于看到人人所看，想到无人所想。
>
> 圣乔其(Albert Szent-Gyögyi)

得证.

(2) 设该表述中使用了 k 个不同整数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的倒数，其中对 $i=1, 2, \cdots, k$，$x_i \equiv 2 \pmod 3$（即 x_i 是 2，5，8，11，… 中的一个数）.

由

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k},$$

两边乘以 $x_1x_2x_3\cdots x_k$，得

$$x_1x_2x_3\cdots x_k=\sum_{i=1}^{k}X_i, \qquad (*)$$

其中 $X_i=\frac{1}{x_i}(x_1x_2\cdots x_k)$ 是 $k-1$ 个 x_j 的乘积.

由$(*)$式，得 $2^k\equiv k2^{k-1} \pmod 3$，于是 $k\equiv 2 \pmod 3$.

因此 k 是 2，5，8，11，…中的一个数.

因为对任意两个大于 1 的不同整数 x_1 和 x_2，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，所以不存在只有 2 项的所需类型的表述.

是否可从$\{2, 5, 8, \cdots\}$中找出 5 个数，使这 5 个数的倒数之和等于 1? 如果可能，不妨设

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5},$$

其中 $2\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$. 则必定有 $x_1\geqslant 2$，$x_2\geqslant 5$，$x_3\geqslant 8$，$x_4\geqslant 11$，$x_5\geqslant 14$，于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}\\
\leqslant&\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}\\
=&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{14}\\
<&\frac{5}{8}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{42}\\
<&\frac{5}{8}+\frac{3}{10}+\frac{3}{40}=1,
\end{aligned}$$

矛盾.

因此要得到所要求的表述，需要的数字个数必须多于 5 个. 下一个可能的个数是 8，由(1)知，确实存在具有 8 项的表述.

问题 302 设已知正方形的边长为 1，则五边形 $ACDFE$(见图 189)的面积为$\frac{5}{8}$，因此所拼成的正方形的边长应为$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

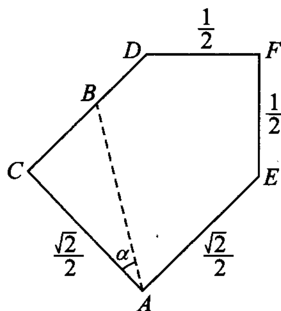


图 189

我们试着在 CD 上求一点 B，使 AB 为所求正方形的一边. 因为$\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{10}}{4}<1=\overline{AD}$，所以这一定可以办到.

因为$\overline{AB}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，由勾股定理，$\overline{CB}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\overline{CD}$，所以 B 是 CD 的中点.

将$\triangle ACB$ 沿 AB 割下，移至 $AC'B'$ 处(见图 190)，使 AC 与 AE 重合，这里 $C'=E$. 则有 $\angle FC'B'=360°-90°-135°=\angle BDF$，$\overline{BD}=\overline{B'C'}$，$\overline{DF}=\overline{EF}=\overline{C'F}$. 于是，再将$\triangle BDF$ 沿 BF 割下，重新摆放，使 B、D 和 F 分别与 B'、C' 和 F 重合. 则正方形 $ABFB'$即为所求.

下面验证 $ABFB'$为正方形. 显然

$$\angle BAB'=\angle CAE=90°,$$

且

$$\angle BFB'=\angle DFE=90°,$$

又由余弦定理，

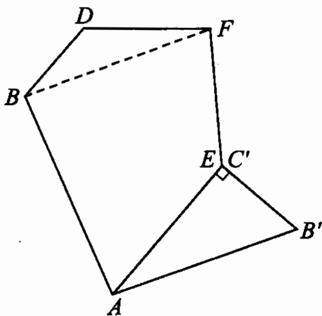


图 190

$$\overline{B'F}^2=\overline{BF}^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{8}=\overline{AB}^2=\overline{AB'}^2.$$

问题 303 在维恩图(见图 191)中，标有 T、R、N 的圆分别表示使用电视、收音机和报纸作为新闻来源的人群，a、b、c、d、e、f、g、h 是每个子集中的人数：a 是不使用任何媒体来源的人数；b 是使用电视，但不使用收音机和报纸的人数；e 是使用电视和收音机，但不使用报纸的人数，等等.

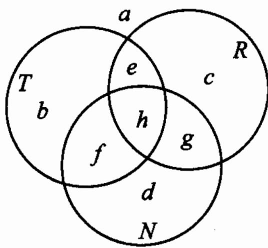


图 191

由维恩图，所给信息可记作

$$b+e+f+h=50, \quad (1)$$
$$a+b+d+f=61, \quad (2)$$
$$a+b+c+e=13, \quad (3)$$
$$e+f+g+h=74, \quad (4)$$

及

$$N=a+b+c+d+e+f+g+h,$$

其中 a、b、c、d、e、f、g、h 都是非负整数.

N 的上界：由(2)式，$d\leqslant 61$，再由(3)式和(4)式，

$$a+b+c+e+f+g+h\leqslant 13+74=87.$$

因此 $N\leqslant 61+87=148$. 当 $a=b=f=e=0$，$d=61$，$h=50$，$c=13$，$g=24$ 时，N 可取到这一数值.

N 的下界：由于

$$f\leqslant b+e+f+h=50,$$

我们有

$$a+b+d=61-f\geqslant 11.$$

因此

$$N=(a+b+d)+(e+f+g+h)+c$$
$$\geqslant 11+74+0=85.$$

$N=85$ 可能吗？如果可能，则上述估计中的不等式都要取等号，于是

$$a+b+d=11,\ c=0,\ f=50.$$

从而由(1)式得 $b=e=h=0$. 于是

$$a+b+c+e=a\leqslant 11,$$

与(3)式矛盾. 因此 N 不可能等于 85.

假设 $N=86$. 则或者 $a+b+d=11$ 且 $c=1$，或者 $a+b+d=12$ 且 $c=0$.

在前一种情况下，$a+b+d=11$，$c=1$，从而推出 $f=50$，$b=e=h=0$，$a+b+c+e\leqslant 12$，与(3)式矛盾.

在后一种情况下，$a+b+d=12$，$c=0$，从而推出 $f=49$，$b+e+h=1$. 由于 $a+b+d=12$，以及由(3)式得 $a+b+e=13$，$e=d+1$，因此 $d=0$，$e=1$，$b=h=0$. 所以 $a=12$，并由(4)式得 $g=24$. 这样，当

$$a=12,\ e=1,\ f=49,$$
$$g=24,\ b=c=d=h=0$$

时，$N=86$.

【习题】 在 86 和 148 之间还有不属于 N 的值吗？

问题 304 设 W 为抛物线上一点，使 WF 垂直于抛物线的对称轴. 设 d 为抛物线的准线，a 为抛物线的对称轴，并设 $\operatorname{dist}(X, l)$ 表示点 X 到直线 l 的距离.

情形 1：P 在 V 和 W 之间，见图 192.

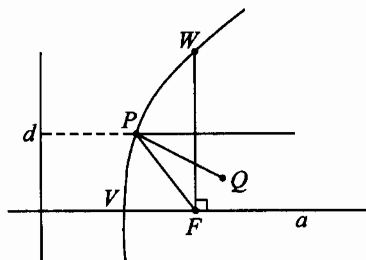


图 192

由抛物线的反射性可知，PQ 平分由 PF 和过 P 且平行于对称轴的直线所构成的角. 如果 PQ 经过对称轴，则有

$\overline{PQ}>\overline{PF}=\text{dist}(P,d)>\text{dist}(V,d)=\overline{VF}$，

与题设矛盾. 因此 PQ 不与对称轴相交.

情形 2：W 在 V 和 P 之间，见图 193. 如果 PQ 经过对称轴，则有

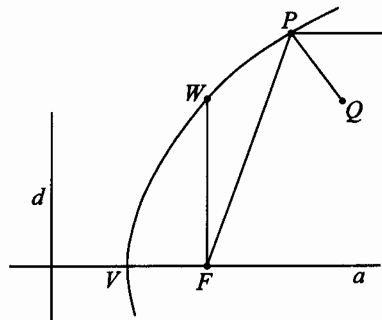


图 193

$$\overline{PQ}>\text{dist}(P,a)\geqslant\overline{WF}=\text{dist}(W,d)$$
$$=2\text{dist}(V,d)=2\,\overline{VF},$$

同样与题设矛盾.

问题 305 解法一：由于$(x+y)^2=(5-z)^2$，且 $xy=3-z(x+y)=3-z(5-z)$，我们有

$$0\leqslant(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=25-10z+z^2-12+20z-4z^2$$
$$=-3z^2+10z+13$$
$$=-(z+1)(3z-13).$$

因此$-1\leqslant z\leqslant\frac{13}{3}$. 从而 z 可能取的最大值是$\frac{13}{3}$. 这个值当 $x-y=0$，$x+y=5-\frac{13}{3}=\frac{2}{3}$，即当 $x=y=\frac{1}{3}$时可取到.

解法二：由 $x+y=5-z$ 及 $xy=3+z^2-5z$ 知，x 和 y 是方程

$$t^2+(z-5)t+(z^2-5z+3)=0$$

的两个根. 此方程有实数根的条件是

$$(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geqslant0,$$

或

$$3z^2-10z-13\leqslant 0.$$

这即是解法一中所得到的关于 z 的条件. 同上可得，$\frac{13}{3}$是 z 的最大值.

【习题】 若 x_1，x_2，…，x_n 都是实数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=b^2$，求任何一个 x_i 所能取得的最大值.

问题 306 解法一：一般来说，在讨论可除性的问题中，对除数进行因式分解是有帮助的. 我们发现 $2304=2^8\times3^2=(2^4\times3)^2=48^2$. 从而，我们要对关于 n 的表达式进行处理，以得到含 48 的项. 于是(利用二项式定理)

$$7^{2n}-2352n-1$$
$$=(7^2)^n-2304n-48n-1$$
$$=(1+48)^n-48n-1-2304n$$
$$=C_n^2 48^2+C_n^3 48^3+\cdots+48^n-2304n$$
$$=2304[C_n^2+C_n^3 48+\cdots+48^{n-2}-n].$$

解法二(数学归纳法)：当 $n=1$ 时，表达式为 $7^2-2352-1=-2304$，结论成立. 假定结论对 $n=k$ 成立，则

$$7^{2(k+1)}-2352(k+1)-1$$
$$=(7^{2k}-2352k-1)+(7^{2k+2}-7^{2k})-(7^2-1+2304)$$
$$=(7^{2k}-2352k-1)+(7^2-1)\cdot(7^{2k}-1)-2304$$
$$=(7^{2k}-2352k-1)+(7^2-1)^2\cdot[7^{2(k-1)}+7^{2(k-2)}+\cdots+1]-2304.$$

由于 $7^{2k}-2352k-1$ 可被 2304 整除，且 $(7^2-1)^2=2304$，因此等式左边可被 2304 整除.

问题 307 解法一：如图 194，设 BCD 是这个四面体的底，这是一个以 BD 为斜边的直角三角形. 由于 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 都是等腰三角形，点 A 必在 BC、BD 和 CD 的垂直平分面上. 又由于这三个平面与 BD 交于它的中点 P，我们有 $AP\perp\triangle BCD$(如图 195). 因此四面体的高是 $\overline{AP}=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}$. 从而四面体的体积等于

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times\left(\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\right)=5\sqrt{3}.$$

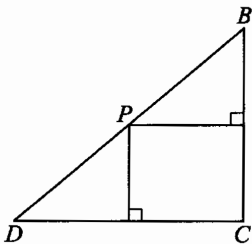


图 194

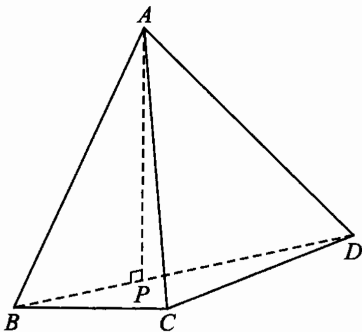


图 195

解法二：由于 A 到 B、C 和 D 的距离相等，A 在平面 BCD 上的正交射影 P 到 B、C 和 D 的距离也相等. 因此 P 是 $\triangle BCD$ 的外心. 设 $R=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{DP}$ 及 $h=\overline{AP}$，则 $R^2+h^2=5^2$. 四面体的体积 V 由 $V=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle BCD}$ 给出. 而 $4R\cdot S_{\triangle BCD}=\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}$，即 $6\cdot 4R=3\times 4\times 5$. 所以 $R=\frac{5}{2}$，于是 $h=\sqrt{25-\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. 从而 $V=5\sqrt{3}$.

【习题】 (1) $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 都是四面体，且有 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{BD}=d$，$\overline{A'B'}=b$，$\overline{A'C'}=c$，$\overline{A'D'}=d$，$\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'B'}=a$. a、b、c、d 取怎样的值，才能使 $ABCD$ 的体积大于 $A'B'C'D'$ 的体积？

(2) 更一般地，证明：四面体 $ABCD$ 的体积可由

$$V^2=\frac{(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})^2}{36}\cdot(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

给出，其中

$$\alpha=\angle BAC,\ \beta=\angle CAD,\ \gamma=\angle DAB.$$

问题 308 解法一：由于原多项式是一个齐次多项式，因此它的任何一个因式也一定是齐次的. 如果令 $(x, y, z, w)=(1,1,1,1)$，则多项式的值为零. 这启发我们可以试试含有同样多的正项和负项的形如 $x+y-z-w$ 的线性因式. 为此，需要用到因子定理.

如果令 $x=z+w-y$，则所得的多项式作为 y(或 z 或 w)的多项式，其系数全为零，所以是一个零多项式. 从而 $x+y-z-w$ 是一个因式. 由对称性，另两个因式必定为 $x+w-y-z$ 和 $x+z-y-w$. 剩下的是一个一次因式，且一定是对称的，因此它是 $x+y+z+w$.

解法二：如果原多项式有 4 个线性因式，则由对称性和齐次性，其因式分解必是下面两种形式之一：

(a) $a(x+y+z-bw)(y+z+w-bx)\cdot(z+w+x-by)(w+x+y-bz)$;

(b) $c(x+y+z+w)(x+y+kz+kw)\cdot(x+z+kw+ky)(x+w+ky+kz)$.

如果有一个线性因子至少有 3 个不同的系数，则由变量的对称性，至少有 6 个这样的因子，这就太多了(由次数可知).

尝试分解式(a). 比较 x^4 的系数，我们有 $-ab=1$. 令 $x=y=z=w=1$，得 $a(3-b)^4=0$，从而有 $b=3$，$a=-\frac{1}{3}$. 但如又令 $z=w=0$，得

$$\begin{aligned}&x^4+y^4-2x^2y^2\\=&-\frac{1}{3}(x+y)^2(y-3x)(x-3y),\end{aligned}$$

当 $x=y=1$ 时上式不成立. 因此(a)不可能.

现尝试(b). 由 x^4 的系数得 $c=1$. 令 $x=y=z=w=1$，得 $0=4\cdot 2^3(1+k)^3$，从而有 $k=-1$. 展开知(b)即所求的分解式.

现证明解法二开头的论断.（对任意多个变量都适用.）如果，比如说，$P(x,y,z)$ 是一个三元多项式，则 P 是 n 次齐次多项式的充分必要条件是，对任意的 t，

$$P(tx,\ ty,\ tz)=t^nP(x,\ y,\ z).\quad (*)$$

设 $P(x,\ y,\ z)=Q(x,\ y,\ z)R(x,\ y,\ z)$. 用 tx、ty、tz 代替 x、y、z，并利用$(*)$式得

$$\begin{aligned}&t^nP(x,\ y,\ z)\\=&Q(tx,\ ty,\ tz)R(tx,\ ty,\ tz).\end{aligned}$$

固定 x、y、z，则两边都是关于 t 的多项式，且方程给出了一个常数与 t^n 的乘积的一个分解. 由于 t 的每一个分解都形如 t^mt^{n-m}，则存在多项式 H 和 K，使

$$Q(tx,\ ty,\ tz)=t^mH(x,\ y,\ z),$$

且

$$R(tx,\ ty,\ tz)=t^{n-m}K(x,\ y,\ z).$$

令 $t=1$，即可证明 Q 和 R 都是齐次的.

【习题】 证明:题中多项式等于行列式

$$\begin{vmatrix}x&y&z&w\\y&x&w&z\\z&w&x&y\\w&z&y&x\end{vmatrix},$$

并利用行列式求得多项式的分解式.

问题 309 假定该轨迹是一条线段.

如图 196，考虑极端情形，即 R 和 S 与 U 重合，则 P 也与 U 重合. 所以 U 在轨迹上. 同理，V 也在轨迹上. 因此，该轨迹就是线段 UV. 设 UV 与 OQ 交于 W. 由于 W 在轨迹上，W 必是 OT 的中点. 又由对称性(或考虑全等三角形$\triangle UWQ$ 和$\triangle VWQ$ 的对应边)知 $UV\perp OT$.

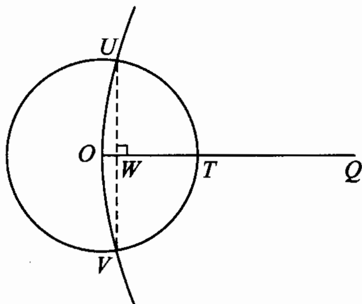


图 196

因为 UV 是 OT 的垂直平分线，

$$\overline{TU}=\overline{OU}=\overline{OT}=\overline{OV}=\overline{TV},$$

所以 O、U 和 V 同在一个以 T 为圆心的圆上. 因此，以 Q 和 T 为圆心的圆有三个公共点 O、U 和 V，从而这两个圆重合. 但这与 Q 在圆 O 外，从而与 T 不同的事实矛盾. 因此 UV 不是所求的轨迹.

问题 310 注意到当 $n=1$、2、3、4 时，在第 n 行的右边是第 n 个奇数的平方(即$(2n-1)^2$)，左边是自 n 起到 $n+(2n-1-1)=3n-2$ 的 $2n-1$ 个连续整数. 这提示我们一般规律应是

$$\begin{aligned}&n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)\\=&(2n-1)^2,\qquad\qquad n=1,\ 2,\ 3\cdots.\end{aligned}$$

通过求左边的等差数列的和，很容易证明这一等式.

问题 311 由于

$$\begin{aligned}&b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}\\=&(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2,\end{aligned}$$

比较 x^{n+1} 的系数，可知

$$b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}a_2+a_na_1,$$

从而

$$b_{n+1}\leqslant a_1a_0+a_2a_0+\cdots+a_{n-1}a_0+a_na_0.$$

因此

$$\begin{aligned}&2b_{n+1}\\ \leqslant&a_1(a_0+a_n)+a_2(a_0+a_{n-1})\\ &+\cdots+a_{n-1}(a_0+a_2)+a_n(a_0+a_1)\\ \leqslant&a_1(a_0+\cdots+a_n)+a_2(a_0+\cdots+a_n)\\ &+\cdots+a_n(a_0+\cdots+a_n)\\ =&(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_0+a_1+\cdots+a_n)\\ \leqslant&(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2=f^2(1).\end{aligned}$$

问题312 为了求得这两个和，我们采用“差式求和法”，即将每一项表示为两个数的差，以便前后相消. 据此，对于(1)，可改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots\\ =&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\\ &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\\ =&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)\\ =&\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这里的计算过程是正确的，不过对其合理性需要作一些说明. 由上面的推导形式，有人可能会写出

$$\begin{aligned}&1+1+1+1+\cdots\\ =&(2-1)+(3-2)+(4-3)+\\ &(5-4)+\cdots\\ =&-1+2-2+3-3+4-4+5-\cdots\\ =&-1,\end{aligned}$$

这看起来太不可思议了. 因此，我们必须分析，一个无限级数的和意味着什么. 通常采用的定义是：一个无限级数的和等于当 n 无限增大时其前 n 项的部分级数的和. 当前的例子对此做了解释.

部分级数的和是

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times7}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\\ &\quad\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{7}\right).\end{aligned}$$

一般地，对 $n=1, 2, 3, \cdots$，

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

(这阐明了求和的基本法则：$\sum\limits_{k=1}^{n}[F(k)-F(k-1)]=F(n)-F(0)$.) 当 $n=100$ 时，部分和是 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{201}\right)=\frac{100}{201}$；当 $n=1\ 000\ 000$ 时，部分和是 $\frac{1000000}{2000001}$. 由此可以看出，随着 n 的增大，部分和任意地接近于 $\frac{1}{2}$. 正是在这个意义上，我们才能够将 $\frac{1}{2}$ 作为所给级数的和.

对于(2)，我们有

$$\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right),$$

$$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right),\cdots.$$

一般地有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].\end{aligned}$$

前 n 项的部分和是

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

随着 n 的增大，这个数越来越接近于 $\frac{1}{4}$. 因此，按我们的定义，问题(2)中级数的和为$\frac{1}{4}$.

问题 313 解法一：任一正整数 b 可分解为以下形式：

$b=2^k\cdot a$, $k\in\{1,2,3,\cdots\}$, $a\in\{1,3,5,\cdots\}$,

即一个 2 的方幂与一个奇数的乘积. 将这 $n+1$ 个整数如此分解为

$$b_i=2^{k_i}a_i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n+1,$$

则 $n+1$ 个奇数 a_i 全都在$\{1,3,5,\cdots,2n-1\}$中(因为 $1\leqslant b_i\leqslant 2n$)，而该集合仅有 n 个元素. 因此(由鸽笼原理)，至少有两个 a_i 相同，不妨设 $a_l=a_m=a$，则

$$b_l=2^{k_l}a,\ b_m=2^{k_m}a.$$

如果 $0\leqslant k_l\leqslant k_m$，则 b_l 整除 b_m；如果 $0\leqslant k_m\leqslant k_l$，则 b_m 整除 b_l.

解法二(数学归纳法)：当 $n=1$ 时，集合为$\{1, 2\}$. 显然对 $n=1$ 结论成立.

假定结论对 $n=k(k\geqslant 1)$成立. 设 S 为$\{1, 2, 3, \cdots, 2k+2\}$的有$(k+1)+1=k+2$ 个元素的子集.

如果 $2k+2\notin S$，则 S 中至少有 $k+1$ 个元素取自$\{1,2,3,\cdots,2k\}$，由归纳假设，其中至少有一个数能整除另一个.

另一方面，设 $2k+2\in S$. 如果 $k+1\in S$，则由于 $2k+2=2(k+1)$，我们已经在 S 中找到了两个数，其中一个数整除另一个. 如果 $k+1\notin S$，则从 S 中去掉 $2k+2$，再添进 $k+1$，构成集合 T. 于是 T 中有 $k+2$ 个元素，且其中有 $k+1$ 元素在$\{1, 2, \cdots, 2k\}$中. 由归纳假设，T 中有两个元素 u、v，且 v 是 u 的倍数. 如果 u 和 v 都不同于$k+1$，则 $u, v\in S$. 如果 u、v 中有一个等于$k+1$，则一定是较大的数 v，且 u 整除 v. 于是 u 整除 $2v=2k+2$，从而 u 和 $2k+2$ 是 S 中的两个元素，且其中一个数整除另一个.

因此在每一种情形下，S 都含有两个元素，使其中一个数整除另一个.

由此，结论对 $n=k+1$ 成立.

问题 314 如果 X 处于使$\overline{AX}=\overline{BX}$的位置，则显然 t_X 平行于 AB. 同时也有(由于$\overline{AX}=\overline{BX}$, $\angle YXA=\angle ZXB=90°$, $\angle YAX=\angle XBZ=45°$)$\triangle AXY\cong\triangle BXZ$，所以$\overline{AY}=\overline{BZ}$，且 YZ 平行于 AB.

另一方面，设$\overline{AX}\neq\overline{BX}$(如图 197). 则 t_X 分别交 AB、BZ 和 AY 与 V、U 和 W. 由于$\angle AXB=90°$, $\angle AXY=90°$,

图 197

$$\angle AYX+\angle YAX=90°$$
$$=\angle WXY+\angle WXA. \quad (*)$$

而 t_X 与 t_A 是自同一点 W 出发的切线，故$\overline{WA}=\overline{WX}$，因此$\angle YAX=\angle WAX=\angle WXA$. 于是由(*)式，$\angle AYX=\angle WXY$，所以$\overline{WY}=\overline{WX}=\overline{WA}$，因此 W 是 AY 的中点.

类似地，有 U 是 ZB 的中点.

现联结 VY 交 t_B 于 Z'. 由于 VW 平分 AY 及 $AY // BZ'$，VW 一定平分 BZ'. 因此 $\overline{BZ'}=2\ \overline{BU}=\overline{BZ}$，从而 $Z=Z'$. 于是 YZ、WU 和 AB 交于 V.

【评论】 同样的结果也可由解析几何得到. 令 $A(-r,0)$，$B(r,0)$ 及 $X(u,v)$，其中 $u^2+v^2=r^2$. 则

$$Y\left(-r,\frac{2rv}{r-u}\right),\quad Z\left(r,\frac{2rv}{r+u}\right),$$

并且除非 $u=0$，直线 YZ、WU 和 AB 交于点 $\left(\frac{r^2}{u},0\right)$.

问题 315 假设，如果可能的话，一个由 6 个连续整数所构成的集合 T 能够被划分成两个不相交的子集 U 和 V，且这两个集合的最小公倍数都等于 m.

假设素数 p 整除 T 中的一个数，不妨设这个数在 U 中. 则 p 整除 m，而 m 也是 V 的最小公倍数，所以 p 整除 V 中的一个数. 因此，任何一个整除 T 中一个数的素数 p 至少整除 T 中的两个数. 于是 $p\leqslant 6$，所以 p 只可能是 2、3 或 5.

因为两个能被 5 整除的数的差的最小值是 5，所以 T 中有四个连续整数不能被 5 整除. 这其中的两个奇数只可能被 3 整除. 但是这样一来，我们将有两个形如 $\pm 3^k(k\geqslant 1)$ 的连续奇数，而这是不可能的. 因此 T 不可能按上述要求划分.

问题 316 考虑数列 $1,2,3,\cdots,f(n)$. 在这个数列中，非平方数是 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n)$，而平方数是 $1^2,2^2,3^2,\cdots,k^2$，其中

$$k^2<f(n)<(k+1)^2.$$

因此 $f(n)=n+k$，其中

$$k^2<f(n)<(k+1)^2.$$

现在我们证明 $k=\{\sqrt{n}\}$. 我们有

$$k^2<n+k<(k+1)^2,$$

即

$$k^2+1\leqslant n+k\leqslant(k+1)^2-1.$$

因此

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=k^2-k+1\leqslant n$$
$$\leqslant k^2+k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

所以

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2},$$

从而 $\{\sqrt{n}\}=k$.

问题 317 你不应当参加这个游戏. 由于我们两个都不拿的牌是按红黑两种颜色两两配对的，因此在游戏结束时，你有的牌数和我有的牌数肯定一样多.

这样，每玩一次这样的游戏你就要失去 1 美元.

有位名叫莫泽[①]的数学家，
他作为出题者名扬天下。
他出的题目蠢得可怕，
还要他弟弟威廉给出解答，
这难得住他吗？解答就是"先生，我不干啦"。

①莱奥·莫泽。——原注

问题 318 解法一：绕 O 点按逆时针方向旋转 $90°$，则 A 落在 B 处，A' 落在 B' 处.

由于旋转保持长度不变，$\overline{AA'}=\overline{BB'}$. 又由于这个变换把任一原来的方向变为与之垂直的方向，$AA'\perp BB'$.

解法二：如果 $A'OA$ 和 $B'OB$ 都是直线段，结论显然成立. 如果不是这样，则由于 $\overline{A'O}=\overline{B'O}$，$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\angle A'OA=\angle B'OB=90°\pm\angle A'OB$，$\triangle A'OA$ 与 $\triangle B'OB$ 全等. 因此 $\overline{AA'}=\overline{BB'}$ 及 $\angle OAA'=\angle OBB'$. 由后者可知，如果 K 是 AA' 和 BB'（必要时为其延长线）的交点，则 $\angle OAK=\angle OAA'=\angle OBB'=\angle OBK$. 于是，$O$、$K$、$A$、$B$ 共圆，因此 $\angle AKB=\angle AOB=90°$，这就是所要证明的.

问题 319 为了找到解决问题的途径，注意到如果 $\triangle MPQ$ 是一个等腰直角三角形，则 P、M、Q 是以 PQ 为对角线的正方形的三个顶点.

以 PQ 为对角线作正方形 $PRQS$（见图 198）. 下面来证明 $S=M$. 由于 $\triangle RPS$ 和 $\triangle APB$ 都是等腰直角三角形，由问题 318 知 $\overline{BS}=\overline{RA}$ 且 $BS\perp RA$. 类似地，$\triangle RQS$ 和 $\triangle AQC$ 都是等腰直角三角形，从而 $\overline{RA}=\overline{SC}$ 且 $RA\perp SC$. 因此 $\overline{BS}=\overline{SC}$ 且 $BS/\!/SC$. 所以 S 即 M，是 BC 的中点.

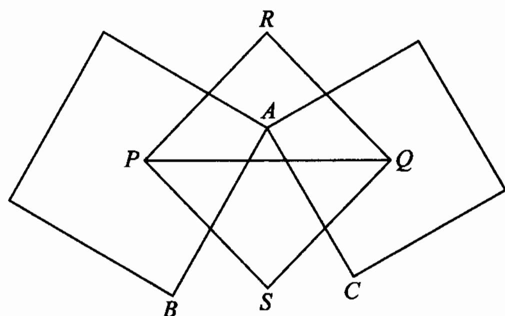


图 198

问题 320 （1）如图 199，设 M 是 AC 的中点. 由问题 319，可知 $\triangle PMR$ 是等腰直角三角形，且 M 是它的直角顶点. 当然，$\triangle AMQ$ 也是等腰直角三角形，且 M 也是它的直角顶点. 由问题 318，可知线段 AP 和 QR 的长度相同，且它们所在的直线互相垂直.

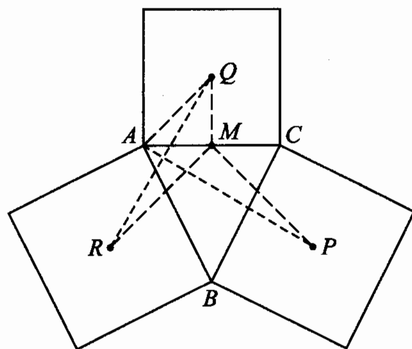


图 199

（2）解法一：如图 200，设 M 是 BD 的中点. 由问题 319（应用到 $\triangle ABD$），可知 $\triangle PMS$ 是等腰直角三角形，且 M 是它的直角顶点. 同样，$\triangle QMR$ 也是等腰直角三角形，且 M 也是它的直角顶点. 由问题 318，可知线段 PR 和 QS 的长度相同，且它们所在的直线互相垂直.

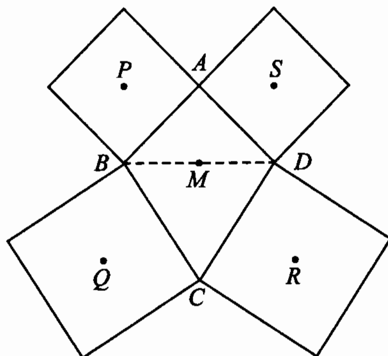


图 200

解法二：设四个顶点 A、B、C、D 所对应的复数分别是 $2Z_1$、$2Z_2$、$2Z_3$、$2Z_4$，即如果 A 的笛卡儿坐标是 $(2x_1, 2y_1)$，则有 $Z_1 = x_1 + iy_1$. 因此有(设 O 为原点)

$$\overrightarrow{OP} = Z_1 + Z_2 + i(Z_1 - Z_2),$$
$$\overrightarrow{OQ} = Z_2 + Z_3 + i(Z_2 - Z_3),$$
$$\overrightarrow{OR} = Z_3 + Z_4 + i(Z_3 - Z_4),$$
$$\overrightarrow{OS} = Z_4 + Z_1 + i(Z_4 - Z_1).$$

因此

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (Z_3 + Z_4 - Z_1 - Z_2) + i(Z_2 + Z_3 - Z_1 - Z_4),$$
$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = (Z_1 + Z_4 - Z_2 - Z_3) + i(Z_3 + Z_4 - Z_1 - Z_2).$$

由此可知 $i\,\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$，即线段 QS 是线段 PR 在平面上绕 O 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到的像.

【评论】 问题319和问题320(1)是问题320(2)的特殊情形!

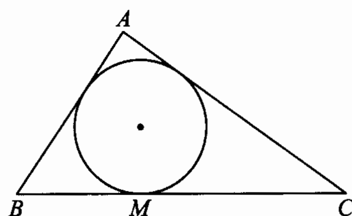


图 201

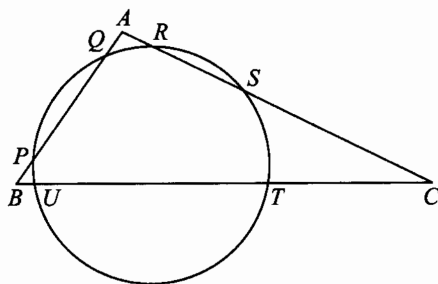


图 202

问题321 (1) 图201中，我们画出了 $\triangle ABC$ 的内切圆. 如果我们保持圆心不动，让半径增加任意一个充分小的量，就能得到一个与三角形的各边都有两个不同交点的圆. 因此，所求圆的半径的下限不超过三角形的内径. 另一方面，考虑任何一个半径小于内径的圆. 如果它与 BC 交于(切点)M 两边的两个点(或与 M 重合)，则它不可能与 AB 或 AC 相交. 如果它与 BC 交于 M 和 C 之间的两点，则它不可能与 AB 相交. 因此，它不可能与三角形的三条边都交于两个不同的点. 所以，所求的下限必为三角形的内径.

(2) 易知该上限至少是 R. 为了了解该圆究竟可能有多大，从任何一个满足条件的圆 $PQRSTU$ 开始(见图202)，我们可以执行三种操作，以继续得到同尺寸或更大的满足条件的圆：

(1) 保持 $\overline{PQ}$ 不变，将 P 和 Q 向 B 的方向移，直到点 R 和 S 几乎重合；

(2) 绕 P 按顺时针方向旋转，直到点 R 和 S 几乎重合；

(3) 保持 P 和 Q 不动，增加圆的尺寸，直到点 S 和 T 几乎与 C 重合.

通过这几种操作，我们可以找到一个比开始时的圆更大的圆，并且使 P 和 Q 尽可能地靠近 B，同时 S 和 T 又非常靠近 C. 因此，每一个满足条件的圆都小于在 B 点与 AB 相切且过 C 的圆. 而且我们能够找到与这个圆的尺寸任意接近的满足条件的圆.

> 从前有一只毛茸茸的狒狒，
> 对着一支低音大管不停地吹。
> 你听它说——
> "看来吹上几百万年也不算白费，
> 因为总会有一个音被我吹对。"
> 爱丁顿(A. Eddington)

如果 a 是 BC 的长度，则这个圆的半径(图 203 中的 OB)长为 $\frac{a}{2}\csc B$. 而 $a=2R\sin A$，这里 R 为外接圆的半径. 因此，满足条件的圆的半径的上限是 $\frac{R\sin A}{\sin B}$，且除 $A=B$ 外，都大于 R(因为 $A>B$ 且 $\pi-A>B$).

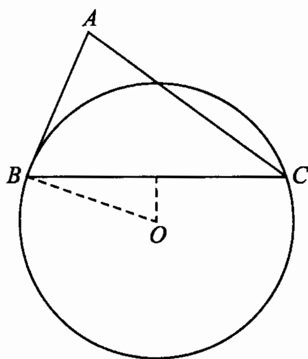


图 203

问题 322 (1) $(0,0)$是 $x+2y=0$ 的唯一解，所以 $f(0)=1$. $(1,0)$是 $x+2y=1$ 的唯一解，所以 $f(1)=1$.

以下设 $n\geqslant 2$. 显然$(n,0)$是 $x+2y=n$ 的一个解. 对于 $x+2y=n$ 的每一个别的解(a,b)，其中 $b\geqslant 1$，都有 $x+2y=n-2$ 的一个解，即$(a,b-1)$与之对应. 因此

$$f(n)=1+f(n-2),\quad n\geqslant 1.$$

重复使用这一递推关系，可得

$$\begin{aligned}f(n)&=1+f(n-2)=2+f(n-4)\\&=3+f(n-6)=\cdots\\&=\begin{cases}\frac{n}{2}+f\left(n-2\cdot\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}+f(0)=\frac{n}{2}+1 & (n\text{ 是偶数}),\\ \frac{n-1}{2}+f\left(n-2\cdot\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n-1}{2}+f(1)=\frac{n-1}{2}+1 & (n\text{ 是奇数})\end{cases}\\&=\left[\frac{n}{2}\right]+1.\end{aligned}$$

如果考虑到对每一个非负整数 $b\left(0\leqslant b\leqslant\frac{n}{2}\right)$，总存在 $x+2y=n$ 的一个解(a,b)，则这一结论也可由此得到.

(2) 容易证明 $g(0)=g(1)=1$，$g(2)=2$. 当 $n\geqslant 3$ 时，对 $x+2y+3z=n$ 的带有 $c=0$ 的解(a,b,c)满足 $x+2y=n$，因此有 $f(n)=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个这种解. 而 $x+2y+3z=n$ 的任何一个带有 $c\geqslant 1$ 的解(a,b,c)都对应 $x+2y+3z=n-3$ 的一个解$(a,b,c-1)$. 因此

$$g(n)=g(n-3)+\left[\frac{n}{2}\right]+1,\quad n\geqslant 3.$$

问题 323 该方程等价于方程

$$(x-y)^2+(x-z)^2+x^2=0,$$

所以 $x=y=z=0$ 是仅有的解.

问题 324 设 P、E、N 分别表示铅笔、橡皮、笔记本的单价，单位为美分. 则 P、E、N 都是正整数，且满足

$$\begin{aligned}P+E+N&=100,\\N&>2P,\\3P&>4E,\\3E&>N.\end{aligned}$$

我们有 $P<\frac{N}{2}<\frac{3E}{2}$，从而

$$100=P+E+N<\frac{3E}{2}+E+3E=\frac{11}{2}E,$$

即

$$E>\frac{200}{11}>18.$$

又 $N>2P>\frac{8}{3}E$，从而

$$100=P+E+N>\frac{4E}{3}+E+\frac{8E}{3}=5E,$$

即 $E<20$. 于是 $18<E<20$，所以 $E=19$. 从而我们有

$$\begin{aligned}81 &= N+P>2P+P\\ &=3P>4E=4\times 19=76,\end{aligned}$$

即 $81>3P>76$，所以 $P=26$. 最后得

$$N=100-P-E=100-19-26=55.$$

问题 325 如果每一行的和都等于 s，则每一列的和也同样等于 s(请证明之)，因此不需要作任何改变. 如果某一行的和小于 s，则同时也必有某一列的和小于 s；加大在这一行和这一列上的元素，直至行和与列和中较大的一个等于 s. 继续这一步骤，直到所要的结果.

在例题中，如果 $s=11$，则过程如下：

$$\begin{pmatrix}3&-5&2\\-6&4&1\\1&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}14&-5&2\\-6&4&1\\1&0&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}14&-5&2\\-4&4&1\\1&0&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}14&-5&2\\-4&14&1\\1&0&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}14&-5&2\\-4&14&1\\1&2&8\end{pmatrix}.$$

问题 326 原问题相当于确定一个以 14，38，74，122，…开始的序列的模型. 设 $g(n)$ 表示这个序列的第 n 项，注意到相邻两项的差为

$$g(2)-g(1)=24,$$

$$g(3)-g(2)=36,$$

$$g(4)-g(3)=48,$$

因此看起来应该有

$$g(n)-g(n-1)=12n,\quad n=2,3,4,\cdots.$$

将这些等式相加得

$$g(n)-g(1)=12(2+3+\cdots+n),\quad n\geqslant 2,$$

或

$$\begin{aligned}g(n)&=14+12(2+3+\cdots+n)\\&=14+12\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]\\&=2+6n(n+1)=6n^2+6n+2.\end{aligned}$$

这提示了一般规律是

$$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+(6n^2+6n+2)^2=(6n^2+6n+3)^2.$$

而这是很容易证明的.

【译者注】 下面的解法也许更简单：

设

$$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+x^2=(x+1)^2,$$

解得

$$x=6n^2+6n+2.$$

由此立即可得一般的规律.

问题 327 为了获得一些解题的思路，假设图已作好. 设三个圆按半径由大到小分别记为 α、β、γ，且$\triangle ABC$ 为所求作的三角形，其中 A 在 α 上，B 在 β 上，C 在 γ 上. 将平面以 A 为中心按适当方向旋转 60°可使 B 落于 C 处. 因此 C 位于 β 在此旋转下的像及 γ 的交点上.

作图：设 O 为 α、β、γ 的公共圆心，且 A 为 α 上任意一点. 如图 204，作等边$\triangle AOP$，并设 δ 是以 P 为圆心、以 β 的半径为半径的圆. 由于$\overline{OP}$等于 α 的半径，由这些半径的大小可知，γ 与 δ 必相交. 设 C 为其中一个交点. 以 A 为圆心、$\overline{AC}$为半径作弧，交 β 于 B 点，使$\triangle AOP$ 与$\triangle ABC$ 有相同的定向，则$\triangle ABC$ 即为所求.

证明：考虑以 A 为中心且使 P 落到 O 处的

旋转. 这个旋转转了 60°，并将圆 δ 落到 β，从而也使点 C 落到圆 β 上的点 B' 处. 因此 $\overline{AB'}=\overline{AC}=\overline{AB}$，且$\triangle AB'C$ 与$\triangle AOP$ 有相同的定向. 所以 $B=B'$，于是$\angle BAC=60°$. 由此知$\triangle ABC$ 是等边三角形.

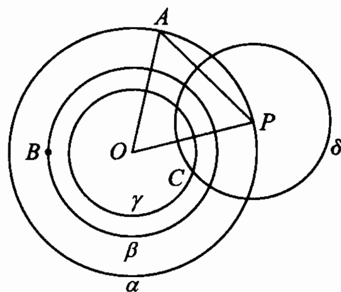


图 204

【译者注】 $\triangle AOP$ 与$\triangle ABC$ 有相同的定向，是指如果由 A 经 O 到 P 是顺时针方向，则由 A 经 B 到 C 也是顺时针方向.

【习题】 如图 205，已知等边$\triangle ABC$ 及三角形内一点 P，且$\overline{PA}=3$，$\overline{PB}=4$，$\overline{PC}=5$，求 $\overline{AB}$.

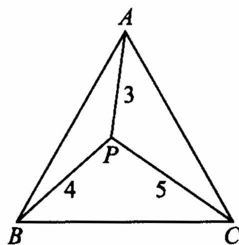


图 205

提示：将图绕 A 旋转 60°，使 C 落于 B 处，B 落于 B'处，P 落于 P'处，证明：$\angle BPP'=90°$，$\angle APB=150°$.

问题 328 这个问题就是要找出能整除 10000! 的 10 的最高次幂. 由于 2 整除 10000! 的次数比 5 整除 10000! 的次数更多，因此能整除 10000! 的 10 的最高次幂等于能整除 10000! 的 5 的最高次幂. 在所有不超过 10000 的数中，每一个 5 的倍数都有因子 5(这样的倍数有 2000 个)，每一个 25 的倍数(这样的倍数有 400 个)多了一个因子 5，每一个 125 的倍数(这样的倍数有 80 个)又多了一个因子 5，每一个 625 的倍数(这样的倍数有 16 个)再多了一个因子 5，最后每一个 3125 的倍数(这样的倍数有 3 个)又多了一个因子 5. 因此零的个数等于 $2000+400+80+16+3=2499$.

一般来说，在 $n!$ 尾部的零的个数由

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^k}\right]$$

给出.

问题 329 在火车行驶到 A 处的这段时间里，他可以跑完桥长的 $\frac{3}{8}$. 如果他跑向 B，则当火车到达 A 处时，他跑到了桥的 $\frac{3}{4}$处. 所以，在火车行驶完桥的长度这一段距离的时间里，他可以跑完从 A 到 B 的剩下的 $\frac{1}{4}$ 路程. 因此，他的速度是火车速度的 $\frac{1}{4}$，即 20 kph.

问题 330 解法一：显然，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}u_n&=8(n-1)+u_{n-1}\\&=8(n-1)+8(n-2)+u_{n-2}\\&\vdots\\&=8[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]+u_1\\&=4n(n-1)+1=(2n-1)^2.\end{aligned}$$

解法二(数学归纳法)：当 $n=1$ 时结论成立. 假设当 $n=k$ 时 $u_k=(2k-1)^2$，则

$$\begin{aligned}u_{k+1}&=u_k+8k=(2k-1)^2+8k\\&=(2k+1)^2\\&=[2(k+1)-1]^2.\end{aligned}$$

解法三：由图 206 知，左下角的正方形有 $(2n-1)^2$ 个点. 拐弯部分有 $2(2n-1)+2$ 对点，即 $8n$ 个点. 从而，我们可以从 $u_1=1$ 个

点起，通过添加如图所示的拐弯部分而逐步构作具有奇数个点的正方形.

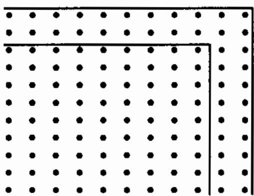


图 206

问题 331 (1) 由算术-几何平均值不等式，对一切 x、y、z、w,有

$$xyzw \leqslant \frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+w^4).$$

假设

$$\begin{aligned} &x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+w^4-4xyzw \\ =&g_1^2(x, y, z, w)+g_2^2(x, y, z, w) \\ &+\cdots+g_k^2(x, y, z, w), \end{aligned}$$

其中 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 都是多项式. 因为左边是一个 4 次的齐次多项式，所以每一个 g_i 必须是次数为 2 的齐次多项式(理由见解后的评论).

没有一个多项式 g_i 包含形如 ax^2 的项，否则 g_i^2 将包含 a^2x^4 的项，且不能被其他任何 g_j^2 中的同类项或等式左边的项消去. 类似地，也没有一个 g_i 包含非平凡的 y^2 或 z^2 的项.

g_i 可能包含形如 bwx 的项吗？如果可以，那么 g_i^2 将包含 $b^2x^2w^2$ 的项. 由于这样的项不出现在左边，所以这一项必定要被另一个具有负系数的同类项消去.

这只有在属于某些 g_i 的包含 x^2 和 w^2 的项相乘时才可能发生. 而这一情形我们在前面已排除了. 因此，没有一个 g_i 包含 xw 的项. 同样，也没有一个 g_i 包含 yw 或 zw 的项. 但是这样一来，每个 g_i 将形如

$$axy+bxz+cyz+dw^2,$$

因此也就没有一个 g_i^2 包含 $xyzw$ 的项. 这与 $-4xyzw$ 出现在左边相矛盾.

(2) 非负性也可由算术-几何平均值不等式推出. 假设

$$\begin{aligned} &x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2-3x^2y^2z^2 \\ =&\sum_{i=1}^{m}h_i^2(x, y, z), \end{aligned}$$

则每一个 h_i 是次数为 3 的齐次多项式，且没有一个包含 x^3、y^3、z^3 的项. 事实上，包含 xy^2 的项也不可能出现. 否则，某个 h_i^2 将包含 ax^2y^4 的项，且 $a>0$. 这一项仅可能被由乘积$(x^2y)y^3$ 所产生的项消去，而这是不可能的. 同样，包含 yz^2 和 zx^2 的项也不出现在任何 h_i 中.

等式左边包含项 $-3x^2y^2z^2$，这意味着至少有一个 h_i 包含 x^2y、yz^2，或 y^2z、zx^2、或 z^2x、xy^2 的项. 这导致矛盾.

所以，无论是多项式(1)还是(2)都不能表示为若干个多项式的平方和.

【评论】 (1)和(2)的证明中用到下述命题：

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个 $2r$ 次齐次多项式，且可以表示为一些多项式 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的平方和，则每一个 f_i 都是 r 次齐次多项式.

也就是说，我们要证明：如果 $f=f_1^2+f_2^2+\cdots+f_k^2$，则每一个 f_i 中的每一项都是形如 $cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=r$ 的 r 次单项式.

设 p 是任一个 f_i 中的项的最低次数. 假定 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是至少出现在一个 f_i 中的由 x_i 的幂的乘积所构成的带有非零系数的 p 次单项式. 则对每一个 i，

$$f_i=c_iu+v_i,$$

其中 c_i 为常数，且至少对一个 i 非零，而 v_i 是一些次数至少是 p(不含 u)的项的和.

则

$$\sum_{i=1}^{k}f_i^2=\left(\sum_{i=1}^{k}c_i^2\right)u^2+\sum_{i=1}^{k}(2c_iuv_i+v_i^2).$$

因为没有一个多项式 uv_i 和 v_i 含有 u^2 的项，所以 u^2 在 $f=\sum f_i^2$ 中的系数一定是正数. 因此 u^2 的次数一定是 $2r$，从而 u 的次

数为 r.

同理可证没有一个 f_i 含有次数超过 r 的项.

问题 332 (1) 设根为 $n-1$、n、$n+1$. 则三根的和为 $3n=p$，三根之积为 $n^3-n=q$，且 $3n^2-1=(n-1)n+(n-1)(n+1)+n(n+1)=11$. 从而有 $n=2$，$p=6$，$q=6$ 或 $n=-2$，$p=-6$，$q=-6$.

(2) 如果所有的根都等于 r，则多项式等于 $(x-r)^3$，因此 $p=3r$，$q=r^3$ 且 $11=3r^2$. 从而得 $r=\pm\frac{\sqrt{33}}{3}$，而 p 和 q 都能因此得到.

问题 333 解法一(数学归纳法)：当 $n=1$ 时，$2^{2n}+24n-10=18$. 假定对 $n=k\geqslant 1$ 结论成立，则

$$\begin{aligned}&2^{2(k+1)}+24(k+1)-10\\=&4(2^{2k}+24k-10)-18(4k-3),\end{aligned}$$

即对 $k+1$ 结论也成立.

解法二(直接证明)：这个值显然能够被 2 整除. 再用模 9 计算，我们有

$$\begin{aligned}&2^{2n}+24n-10\\\equiv&(3-1)^{2n}+6n-1\\\equiv&(-2n\cdot 3+1)+6n-1=0,\end{aligned}$$

因此

$$2^{2n}+24n-10\equiv 0 \pmod{18}.$$

问题 334 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{2n-a_1, 2n-a_2, \cdots, 2n-a_n\}$. 由于 A 中的元素互不相同，B 中的元素也互不相同. 进一步由

$$1\leqslant a_i\leqslant 2n-1,$$

可知

$$1\leqslant 2n-a_i\leqslant 2n-1,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

由于

$$A\cup B\subseteq\{1, 2, \cdots, 2n-1\},$$

我们有 $|A\cup B|\leqslant 2n-1<2n$，$|A|=|B|=n$，所以 $A\cap B\neq\varnothing$. 即存在某个 i 和 j，使

$$a_i=2n-a_j.$$

问题 335 对每一个给定的整数，计算它与最接近的 $2n$ 的倍数的差的绝对值，所得结果是 $n+1$ 个整数 0，1，2，…，n 中的一个. 由于给定了 $n+2$ 个整数，上述结果中必有一个，不妨设为 r，至少出现两次(根据鸽笼原理). 因此，集合中存在两个整数 u、v，使下列情形(对整数 p 和 q)必有一个成立：

(1) $u=2np+r$，$v=2nq+r$；

(2) $u=2np+r$，$v=2nq-r$；

(3) $u=2np-r$，$v=2nq-r$.

在情形(1)和(3)中，$u-v$ 能被 $2n$ 整除，在情形(2)中，$u+v$ 能被 $2n$ 整除.

问题 336 如图 207，设三条垂线分别交 BC、AC 和 AB 的延长线于 E、F 和 G.

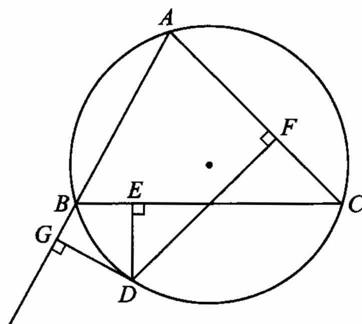


图 207

联结 GE、EF、BD、CD. 由于 A、G、D、F 共圆，$\angle GDF+\angle GAF=180°$. 由于 $ABCD$ 共圆，$\angle BDC+\angle BAC=180°$. 所以 $\angle GDF=\angle BDC$，从而 $\angle BDG=\angle CDF$. 由于 B、G、D、E 共圆，$\angle BDG=\angle BEG$. 由于 D、E、F、C 共圆，$\angle CDF=\angle CEF$. 所以 $\angle BEG=\angle CEF$. 因此 G、E、F 在一条直线上.

这条线被称为西姆森线，但实际上是由威廉·华莱士在 1927 年发现的.

问题 337 不失一般性，可设三次多项式的首项系数为1. 从而有

$$x^3 - px^2 + qx - r$$
$$\equiv (x-u)(x-v)(x-uv),$$

其中 p、q、r 都是有理数. 展开右边，比较系数得

$$p = u + v + uv,$$
$$q = uv + u^2v + uv^2, \quad r = u^2v^2.$$

由这些方程可以容易地导出，当 $p \neq -1$ 时，

$$uv = \frac{q+r}{1+p}$$

是一个有理数. 当 $p=-1$ 时，$(1+u)(1+v)=0$，因此 u 或者 v 等于 -1.

问题 338 情形 $n=1$ 及 $n=2$ 显示，这两个最大公因数都是可能出现的. n^2+1 和 $(n+1)^2+1$ 的任意一个公因数 d 都能整除它们的差 $2n+1$. 因此 d 整除

$$4(n^2+1)-(2n+1)(2n-1)=5.$$

【习题】 证明：当且仅当 $n \equiv 2 \pmod 5$ 时，最大公因数是5.

问题 339 如果设 $x=\cos 36°$，则 $\cos 72° = 2x^2-1$. 由于

$$\cos 36° - \cos 72° = 2\sin 54° \cdot \sin 18°$$
$$= 2\cos 36° \cdot \cos 72°,$$

我们有 $x-2x^2+1=4x^3-2x$，从而

$$4x^3+2x^2-3x-1=0.$$

注意到 -1 是一个根，于是有分解：

$$(4x^2-2x-1)(x+1)=0.$$

由于 $x=\cos 36° \neq -1$，我们有

$$4x^2-2x-1=0.$$

因此(1)

$$\cos 36° - \cos 72°$$
$$= x-(2x^2-1)$$
$$= -\frac{1}{2}(4x^2-2x-1)+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

(2)

$$\cos 36° \cdot \cos 72° = \frac{1}{2}(\cos 36° - \cos 72°) = \frac{1}{4}.$$

问题 340

$$7^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{4}} < 9^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}}$$
$$= 3+2+2 = 7.$$
$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{4}} > 2+1+1=4.$$

【习题】 你能找到一个简单的方法确定当 $n=5$ 及 $n=6$ 时，$n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{4}}$ 与 n 哪个大吗?

问题 341 如果对手留给某人从45到55(含)之间的任何一个数，则他就处于赢家的位置. 因此一个能够得到44的人，只要正常发挥，就一定能赢.

类似的理由可知，能够得到32的人就处于赢家的位置. 依次类推，可知要得到20和8.

因此，第一个人处于有利地位. 如果他先选8，然后每次在对手的数字上加上适当的数,使和依次分别为20、32、44、56，他就赢了.

【习题】 (1) 能否将56换为另外一个数，使对第二个人有利? 所有可能的数是什么?

(2) 两个人玩下列游戏：第一个人任选一个从1到55(含)的数，第二个人在这个数上任意加上一个不超过第一个人所选数的两倍的正整数. 游戏继续交替进行，每次都加上一个不超过前一个人所用数的两倍的正整数. 最先加到56的人赢. 游戏对谁有利?

(3) 游戏同(2)，所不同的是每一个人所加的数不能超过前一个人所加的数. 这次又对谁有利呢?

问题 342 图208中，

$$\overline{AB}=2a, \quad \overline{AC}=\overline{BC}=R,$$
$$\overline{DE}=\overline{DF}=r, \quad \overline{CD}=R-r.$$

由相似三角形 $\triangle GCB$ 与 $\triangle ECD$ 得

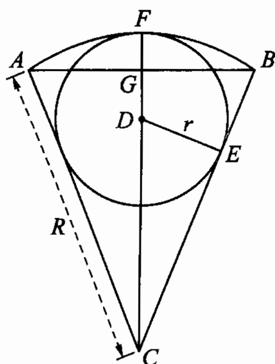


图 208

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{BG}},$$

因此

$$\frac{R-r}{r}=\frac{R}{a}, 即 \frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}.$$

问题 343 如图 209，联结平行四边形对边的中点，将这个平行四边形分为四个平行四边形. 注意左上角处的平行四边形 $AEPH$. 四边形 $PQRS$ 就是所求图形在 $AEPH$ 中的部分.

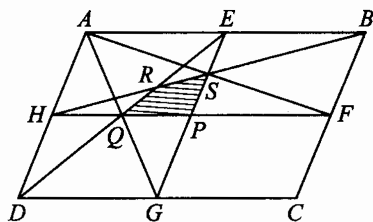


图 209

首先注意到 A、R、P 三点共线，且 $\overline{AP}=3\,\overline{RP}$. 这可由 R 是 $\triangle ADB$ 的两条中线 BH 和 DE 的交点，因此也一定在第三条中线 AP 上这一事实推出. 于是有

$S_{\triangle APS}=3S_{\triangle RPS}$，及 $S_{\triangle AQP}=3S_{\triangle RQP}$.

因此

$$S_{PQRS}=\frac{1}{3}S_{PQAS}=\frac{1}{6}S_{AEPH}.$$

同样的推理可应用于其他三个子平行四边形，最后得到由 AG、AF、BH、BG、CE、CH、DF 和 DE 所围成的图形的面积是 $\frac{1}{6}S_{ABCD}$.

问题 344 不会. 事实上，我们可用数学归纳法证明 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时，

$$1<u_n<\frac{1}{1-u}.$$

首先注意到

$$1+u<\frac{1}{1-u}.$$

显然

$$1<1+u=u_1, \quad u_1=1+u<\frac{1}{1-u}.$$

现在假定当 $n=k\geqslant 2$ 时，

$$1<u_k<\frac{1}{1-u},$$

则

$$1=1-u+u<\frac{1}{u_k}+u=u_{k+1},$$

$$u_{k+1}=\frac{1}{u_k}+u<1+u<\frac{1}{1-u},$$

因此

$$1<u_{k+1}<\frac{1}{1-u}.$$

证毕.

【习题】 通过求出 u_n 的明确表达式来证明这一结论.

提示：一个解决办法是定义数列 v_n，使 $u_n=\frac{v_{n+1}}{v_n}$. 因此取 $v_1=1$，$v_2=1+u$，并且一般有

$$v_{n+1}=u_n v_n, \quad n=1, 2, 3, \cdots.$$

从而 v_n 满足

$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}=\frac{v_n}{v_{n+1}}+u,$$

或

$$v_{n+2}=uv_{n+1}+v_n, \quad n=1, 2, 3, \cdots.$$

其一般解形如

$$v_n=ar^n+bs^n,$$

其中 a、b 为常数，且 r 和 s 是多项式 t^2-ut-1 的两个根.

问题 345 (1) a 和 b 的任何一个公因数都整除 $a-b$. 如果 $b=a+1$，则任一公因数都整除 1.

(2) $n!+1$.

(3) 一个素数 p，如果整除 $r+1$，$r+2$，…，$2r$ 中的任何一个，则显然 $\leqslant 2r$，从而也就不整除 $(2r)!+1$. 因此 $t=(2r)!+1$ 符合要求.

问题 346 解法一：可以. 计算 x 与一个负数 $-n^2$ 的乘积：

$$-n^2x=n+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{n}+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x}}};$$

计算 x 与一个正数 n^2 的乘积：

$$n^2x=n+\cfrac{1}{-\cfrac{n+1}{n}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-(n+1)+\cfrac{1}{x}}}}.$$

解法二：如果 $u\neq 1$，我们可由 $u^2=u-\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)^{-1}$ 求出 u^2，并且由 $\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u}\right)^{-1}$ 求出 $\frac{1}{2}u$. 进而可由

$$vw=\left(\frac{v+w}{2}\right)^2-\left(\frac{v-w}{2}\right)^2$$

求出任何一个乘积 vw.

问题 347 首先应当明白这个集合必须是无限延伸的，但却不必是连通的. 一个容易想到的集合是 $\{(m,n)\mid m,n$ 为整数$\}$. 这个集合以直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$，以及更多其他直线作为它的对称轴.

【习题】 假如要求恰有三条非共点的对称轴呢？假如要求恰有 n 条非共点的对称轴呢？

问题 348 $p+q$ 是偶数，所以 $\frac{1}{2}(p+q)$ 是界于 p 和 q 之间的一个整数. 由于 p、q 是两个连续素数，$\frac{1}{2}(p+q)$ 就不是素数，即这是两个或更多个素数的乘积，于是 $p+q=2\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

问题 349 (1)可由(2)的结果导出.

假定 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 是有理数，则

$$\sqrt{m}-\sqrt{n}=\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

也是一个有理数.

因此 $\sqrt{m}=\frac{1}{2}(\sqrt{m}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}(\sqrt{m}-\sqrt{n})$ 是有理数. 所以 m 是一个完全平方数. 类似地，n 也是一个完全平方数. 反之，如果 m 和 n 都是完全平方数，则 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 是一个整数，因此是有理数.

【习题】 (1) 设 m_1，m_2，…，m_k 都是正整数，证明：如果至少有一个 m_i 不是有理数的平方，则 $\sum_{i=1}^{k}\sqrt{m_i}$ 是无理数；

(2) 证明：$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ 不是有理数；

(3) 设 m 和 n 为整数. 在什么情况下 $\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}$ 为有理数？(提示：设这个数为 x，则 $n=(x-\sqrt[3]{m})^3=x^3-m-3x\sqrt[3]{mn}$.)

参见 Gregg N. Petruno, Sums of irrational square roots are irrational, *Math. Mag.* 61 (1988): 44—45.

问题 350 每选取一对 P_i 的点和一对 Q_i 的点，都可得到一个交点. 通过依次在两条直线上选择适当的点，可以使所有的交点都不相同. 因此交点数的最大值是 $C_m^2C_n^2$.

【习题】 正 n 边形的对角线共有多少个交点？

问题 351 设

$$F(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5.$$

由于

$F(x,-x,z)=F(x,y,-x)$
$=F(x,y,-y)=0,$

由因子定理，$F(x,y,z)$有因子 $x+y$，$x+z$ 和 $y+z$. 设

$F(x,y,z)$
$=(x+y)(x+z)(y+z)G(x,y,z),$ (＊)

则 $G(x,y,z)$必是一个次数为 2 的齐次对称多项式，因此形如

$G(x,y,z)$
$=a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz).$

在(＊)式中令 $x=y=z=1$，得 $3^5-3=8(3a+3b)$，或 $a+b=10$. 再令 $x=y=1$ 和 $z=0$，得 $2^5-2=2(2a+b)$，或 $2a+b=15$. 由此得 $a=b=5$，从而

$G(x, y, z)=5(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz).$

问题 352 (1)

$112296^2-79896^2$
$=(112296-79896)(112296+79896)$
$=32400\times192192=18^2\times10^2\times192\times1001$
$=(2\times9\times3\times6)(2\times5\times10)\times$
$(2\times8\times12)(7\times11\times13)$
$=13!.$

(2) 由方程可以看出，应当从 651^4-599^4 中分解出因子 10^4. 经计算，

651^4-599^4
$=(651^2-599^2)(651^2+599^2)$
$=(651-599)(651+599)(651^2+599^2)$
$=52\times1250[(625+26)^2+(625-26)^2]$
$=2^2\times13\times2\times5^4\times2(625^2+26^2)$
$=10^4\times13(25^4+26^2),$

可推出

$651^4-599^4-430^4-340^4-240^4=10^4A,$

其中

$A=13(25^4+26^2)-(43^4+34^4+24^4)$
$=12\times25^4+4\times13^3-(34^4+24^4)-$
(43^4-25^4)
$=12\times25^4+4\times13^3-16(17^4+12^4)-$
$18\times68\times2(34^2+9^2)$
$=4B,$

而

$B=3\times25^4+13^3-4(17^4+12^4)-$
$17\times36(34^2+9^2).$

我们还须证明 $A=B=0$. 这可以应用下面的引理来完成，证明过程留给读者.

引理 设 N 是一个可被正整数 n_1，n_2，…，n_k 整除的整数，如果 n_1，n_2，…，n_k 的最小公倍数大于 N，则 $N=0$.

这启发我们要对足够多的最小公倍数大于 A 的模 m，证明 $A\equiv0 \pmod m$. 我们尝试用不同素数的方幂来表示 m.

$B\equiv3\times9^4-3^3-4(1+0)-1\times4\times(4+81)$
$\equiv3\times81^2-11-4-4\times1$
$\equiv3-11-4-4=-16\equiv0 \pmod{16},$

所以 $A\equiv0 \pmod{64}$.

又

$A\equiv13(2^4+1^2)-(16^4+7^4+0)$
$\equiv13\times17-(256^2+49^2)$
$\equiv13(-10)-[(-14)^2+49^2]$
$\equiv-130-7^2(2^2+7^2)$
$\equiv-130-49(-1)$
$=-81\equiv0 \pmod{27},$

$A\equiv13(0+1^2)-[(-7)^4+9^4+1]$
$\equiv13-(49^2+81^2+1)$
$\equiv13-(1+6^2+1)$
$=-25\equiv0 \pmod{25},$

$A\equiv-1(4^4+2^2)-(1+1+4^4)$
$\equiv-1(2^2+2^2)-(1+1+2^2)$
$=-14\equiv0 \pmod 7,$

$A\equiv2(3^4+4^2)-(1+1+2^4)$
$\equiv2(2^2+2^4)-18=40-18=22$
$\equiv0 \pmod{11},$

$A\equiv0-(4^4+8^4+2^4)=-2^4(2^4+4^4+1)$
$\equiv-2^4(4^2+3^2+1)\equiv-2^4(3+9+1)$
$\equiv0 \pmod{13},$

$B\equiv3\times8^4+(-4)^3-4(0+12^4)-0$
$\equiv3\times4^6-4^3-3^4\times4^5$
$=4^3(3\times4^3-1-3^4\times4^2)$

$$\equiv 4^3[3(-4)-1-3^4(-1)]$$
$$=4^3(-12-1+81)$$
$$=4^3\times 68\equiv 0 \pmod{17},$$

从而 $A\equiv 0 \pmod{17}$. 因此，A 能被 $64\times 27\times 25\times 7\times 11\times 13\times 17$ 整除，而这个数超过 $1600\times 27\times 1001\times 17>10^6\times\frac{3}{2}\times 27\times 17>10^6\times 40\times 17>6\times 10^8$.

然而，

$$|A|<\max(13(25^4+26^2),\ 43^4+34^4+24^4)$$
$$<\max(13\times 26^2(26^2+1),\ 3\times 50^4)$$
$$<\max(13\times 30^4,\ 3\times 50^4)<13\times 50^4$$
$$=13\times 625\times 10^4<13\times 10^7<6\times 10^8.$$

因为 A 可被一个比它大的数整除，所以 A 一定是零.

问题 353 设

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

乘以 $\frac{1}{2}$ 得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-5}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

第一式减去第二式得

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

从而

$$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

问题 354 取以 n 为底的对数，我们须证明

$$2=(\log_k m)(1+\log_n k),$$

或

$$2=\log_k m+\log_n m. \qquad (*)$$

(此处用到了对数的性质 $\log_c b\cdot\log_b a=\log_c a$.) 根据等差数列的条件，我们有

$$2\log_m x=\log_n x+\log_k x.$$

两边乘以 $\log_x m$，并进一步利用对数性质 $\log_a b\cdot\log_b a=1$，即得($*$)式.

问题 355 将 100 个方程相加得

$$3(x_1+x_2+\cdots+x_{100})=0.$$

从而

$$0=(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+\cdots+(x_{97}+x_{98}+x_{99})+x_{100}$$
$$=0+0+0+\cdots+0+x_{100},$$

即 $x_{100}=0$. 类似地可得 $x_1=x_2=\cdots=x_{99}=0$.

【习题】 如果将题目中的 100 用其他正整数代替，结果如何？

问题 356 当 $n=1$ 时，(1)与(2)显然都成立，所以我们假定 $n>1$. x 可表示为以下形式：

$$x=a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots, \qquad (*)$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots$都是整数，且对 $i=1, 2, 3, \cdots$,

$$0\leqslant a_i\leqslant n-1.$$

于是

$$[x]=a_0,$$
$$nx=na_0+a_1+\frac{a_2}{n}+\frac{a_3}{n^2}+\cdots,$$
$$[nx]=na_0+a_1,$$

从而

$$[nx]-n[x]=a_1,$$

(1)得证.

为证(2)，注意到(利用(*)式和 y 的类似表达式)可将 x 和 y 表示为以下形式：

$$x=a_0+\frac{a_1+\alpha}{n},$$

$$y=b_0+\frac{b_1+\beta}{n},\quad 0\leqslant\alpha、\beta<1,$$

于是

$$x+y=a_0+b_0+\frac{a_1+b_1+\alpha+\beta}{n},$$

$$0\leqslant\alpha、\beta<1.$$

则有(i) $a_1+b_1+\alpha+\beta<n$ 或(ii) $n\leqslant a_1+b_1+\alpha+\beta$.

对情形(i)，$[x+y]=a_0+b_0$，所以

$$\begin{aligned}&[x]+[y]+(n-1)[x+y]\\=&a_0+b_0+(n-1)(a_0+b_0)\\=&na_0+nb_0\leqslant na_0+a_1+nb_0+b_1\\=&[nx]+[ny].\end{aligned}$$

对情形(ii)，由 $\alpha+\beta<2$，得 $a_1+b_1>n-2$，所以 $a_1+b_1\geqslant n-1$，而 $n\leqslant a_1+b_1+\alpha+\beta<2n$，因此

$$[x+y]=a_0+b_0+1,$$

从而

$$\begin{aligned}&[x]+[y]+(n-1)[x+y]\\=&a_0+b_0+(n-1)(a_0+b_0+1)\\=&na_0+nb_0+n-1\\\leqslant&na_0+nb_0+a_1+b_1\\=&[nx]+[ny].\end{aligned}$$

问题 357 设线段为 AB. 在 AB 的同一边作垂线 AX 和 BY. 在 AX 上任取两点 P 和 Q，过 P 和 Q 作 AX 的垂线交 BY(或延长线)于点 R 和 S. 设线段 AR 和 BP 交于 M，AS 和 BQ 交于 N. 则直线 MN 平分 AB.

问题 358 如图 210，设$\triangle ABC$ 是一个以 AD、BE 和 CF 为中线的三角形. 延长 AD 到 H，使 $\overline{AD}=\overline{DH}$. 则$\triangle BDH\cong\triangle CDA$，从而 $\overline{BH}=\overline{AC}$. 由三角不等式，

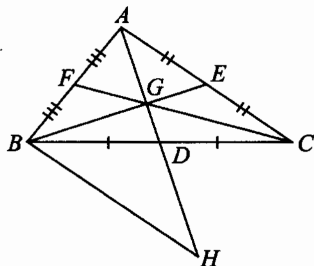


图 210

$$2\,\overline{AD}=\overline{AH}<\overline{AB}+\overline{BH}=\overline{AB}+\overline{AC}.$$

类似地有 $2\,\overline{BE}<\overline{AB}+\overline{BC}$ 及 $2\,\overline{CF}<\overline{AC}+\overline{BC}$. 将这三个不等式相加得

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}<\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}.$$

另一方面，

$$\overline{BC}<\overline{BG}+\overline{GC}=\frac{2}{3}(\overline{BE}+\overline{CF}),$$

$$\overline{AC}<\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{CF}),$$

$$\overline{AB}<\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}).$$

因此

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}<\frac{4}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}).$$

问题 359 (1) 124 大. 这可从下面一系列前后等价的不等式导出：

$$29\sqrt{14}+4\sqrt{15}<124,$$

$$29\sqrt{14}<124-4\sqrt{15},$$

$$29^2\times14<124^2-2\times4\times124\sqrt{15}+4^2\times15,$$

$$(30-1)^2\times7<62\times124-4\times124\sqrt{15}+8\times15,$$

$$4\times124\sqrt{15}<62\times124+8\times15-(901-60)\times7,$$

$$496\sqrt{15}<7688+120-(6307-420)=1921,$$

$$496^2\times15<1921^2,$$

$$3690240<3690241,$$

$$0<1.$$

(2) 2040 大. 这可从下面一系列前后等价的不等式导出：

$$2040 > 759\sqrt{7} + 2\sqrt{254},$$
$$2040 - 2\sqrt{254} > 759\sqrt{7},$$
$$(2040 - 2\sqrt{254})^2 > 7 \times 759^2,$$
$$4162616 - 8160\sqrt{254} > 4032567,$$
$$130049 > 8160\sqrt{254},$$
$$130049^2 > 254 \times 8160^2,$$
$$16912742401 > 16912742400,$$
$$1 > 0.$$

问题 360 连续平方数的差构成一个公差为2的等差数列：

$$1^2-0^2=1,\quad 2^2-1^2=3,$$
$$3^2-2^2=5,\quad 4^2-3^2=7,\ \cdots.$$

每隔一个取项(没有两个项含有相同的平方数)可得到两个公差都是4的等差数列：

$$1^2-0^2=1,\quad 3^2-2^2=5,\quad 5^2-4^2=9,\ \cdots;$$
$$2^2-1^2=3,\quad 4^2-3^2=7,\quad 6^2-5^2=11,\ \cdots.$$

因此

$$[(q+3)^2-(q+2)^2]-[(q+1)^2-q^2]=4,$$
$$q=0,1,2,\cdots.$$

即对 $q=0,1,2,\cdots$,

$$4=q^2-(q+1)^2-(q+2)^2+(q+3)^2.$$

所以，如果 n 可表示成

$$n=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^3+\cdots+\varepsilon_m m^2$$

的形式，则 $n+4$ 也可表示成这种形式：

$$\begin{aligned}&n+4\\ &=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^3+\cdots+\varepsilon_m m^2+\\ &\quad (m+1)^2-(m+2)^2-\\ &\quad (m+3)^2+(m+4)^2.\end{aligned}$$

因为1、2、3、4都可表示成所要求的形式，由此推出所有整数都可如此表示．现在已经很容易写出这样的表达式了．对 $k\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&1+4k\\ &=1^2+\sum_{1}^{2k}(-1)^{j+1}[(2j)^2-(2j+1)^2],\\ &2+4k\\ &=-1^2-2^2-3^2+4^2+\\ &\quad\sum_{2}^{2k+1}(-1)^j[(2j+1)^2-(2j+2)^2],\\ &3+4k\\ &=-1^2+2^2+\\ &\quad\sum_{1}^{2k}(-1)^{j+1}[(2j+1)^2-(2j+2)^2],\\ &4+4k\\ &=-1^2-2^2+3^2+\\ &\quad\sum_{2}^{2k+1}(-1)^j[(2j)^2-(2j+1)^2].\end{aligned}$$

【习题】 如将平方改为立方，你能得到一个类似的结论吗？

问题 361 (1) 设 AB 和 CM 交于 N(见图211)．令 $a=\overline{NM}$, $b=\overline{CD}$, $c=\overline{AN}=\overline{BN}$, 且 $r=\overline{AM}=\overline{DM}=\overline{BM}$. 由于 $\triangle ACM \backsim \triangle NAM$, $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{NM}}$, 或 $a(b+r)=r^2$. 于是

$$S_{\triangle ABM}=ac,\quad S_{ACBM}=(b+r)c,$$
$$S_{ADBM}=rc=c\sqrt{a(b+r)},$$

由此即得所要的结果.

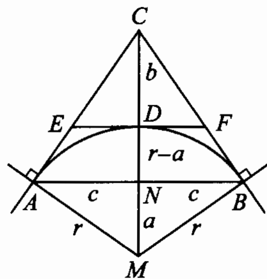


图 211

(2) 两个数 x 和 y 的调和中项"h"由 $\dfrac{2}{h}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 给出．本题中

$$x=S_{ADBM}=rc,$$
$$y=S_{ACBM}=(b+r)c,$$

且

$$h=S_{AEFBM}=(b+r)c-b\,\overline{ED}$$

$$=(b+r)c-\frac{b(bc)}{b+r-a}.$$

这是由于$\triangle CDE$与$\triangle CNA$相似，

$$\frac{\overline{ED}}{c}=\frac{b}{b+r-a}.$$

化简得

$$h=\frac{c[(b+r)^2-a(b+r)-b^2]}{b+r-a},$$

再利用$a(b+r)=r^2$，得

$$h=\frac{2brc}{b+r-a}.$$

于是

$$\frac{2}{h}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{b+r-a}{brc}-\frac{1}{rc}-\frac{1}{(b+r)c}$$

$$=\frac{r-a}{brc}-\frac{1}{(b+r)c}$$

$$=\frac{(r-a)(b+r)-br}{brc(b+r)}$$

$$=\frac{r(b+r)-a(b+r)-br}{brc(b+r)}$$

$$=\frac{r(b+r)-r^2-br}{brc(b+r)}=0.$$

问题 362 这是不可能的．如果我们用10的幂去除其中一个或两个数，问题的性质并不会改变．所以为方便起见，我们不妨设这两个数为$a+r$和$b+s$，其中a和b都是整数，且

$$1\leqslant a<b\leqslant 9,\quad 0\leqslant r、s<1.$$

设$(a+r)(b+s)<10$．则乘积的首位数字至少是ab，这是一个一位整数．由于$a\geqslant 1$，我们有$a<b\leqslant ab$．即得所证．

设$(a+r)(b+s)\geqslant 10$．由于

$$(a+r)(b+s)<(a+1)(9+1)=10(a+1),$$

这个乘积是介于10和90(含)之间的一个数，它的首位数字不超过a．也得所证．

问题 363 通过比较来去时他的钟所显示的时间，可以知道他离开了多长时间．通过他朋友家的钟，又可以知道他在朋友家所待的时间，由此可算出他步行所用的时间．将这个时间的一半加到他离开朋友家时他朋友家的钟所显示的时刻，就得到他矫正时钟的准确时间．

问题 364 这赌徒每赢一次，他的钱数就乘以$\frac{3}{2}$；而每输一次，他的钱数就乘以$\frac{1}{2}$．如果在连续的$2n$次赌博中他赢了n次也输了n次，则他的钱数A缩减为

$$A\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^nA.$$

要不了多久他就要破产了．

问题 365 人口普查员仔细地审视了下面这一串平方数：

1，4，9，16，25，36，49，64，81，100.

丈夫的年龄是这中间的一个数，并且是这中间三个更小的数的和．以熟练的心算，他很快发现

$$49=36+9+4.$$

所以丈夫的年龄是49，而妻子的年龄是36．如果女儿的年龄是9，则祖父的年龄将是$49+36+9=94$，不是一个素数．所以女儿的年龄是4，且祖父的年龄是$49+36+4=89$，这是一个素数．剩下的9是儿子的年龄．而这个注记则注明妻子的年龄是她孩子们年龄的乘积．

问题 366 首先考虑(2)．设$P_1,P_2,\cdots,P_n$和$M_1,M_2,\cdots,M_n$分别表示n边形的顶点和中点，且M_i为P_iP_{i+1}的中点(M_n为P_nP_1的中点)．又设$\overrightarrow{OP_i}$和$\overrightarrow{OM_i}$分别表示由公共原点O到P_i和M_i的向量．则我们想知道的是，何时下列方程组

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=2\overrightarrow{OM_1},$$
$$\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=2\overrightarrow{OM_2},$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{OP_n}+\overrightarrow{OP_1}=2\overrightarrow{OM_n}$$

可唯一解出各$\overrightarrow{OP_i}$．

当 n 是奇数时，逐步求解得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= 2\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OP_2}\\ &= 2\overrightarrow{OM_1} - 2\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OP_3}\\ &= \cdots\\ &= 2\overrightarrow{OM_1} - 2\overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_3} - \cdots +\\ &\quad 2\overrightarrow{OM_n} - \overrightarrow{OP_1},\end{aligned}$$

由此得唯一的

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} - \cdots + \overrightarrow{OM_n}.$$

类似地可唯一求得其他的 $\overrightarrow{OP_i}$. 另一方面，当 n 是偶数时，最后可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= 2\overrightarrow{OM_1} - 2\overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_3} - \cdots -\\ &\quad 2\overrightarrow{OM_n} + \overrightarrow{OP_1}.\end{aligned}$$

该方程仅当

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_3} + \cdots + \overrightarrow{OM_{n-1}}\\ &= \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_4} + \cdots + \overrightarrow{OM_n}\end{aligned}$$

时成立. 如果该条件成立，则关于 $\overrightarrow{OP_i}$ 的方程不是独立的，因此有无限多个解.

对于(1)，$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{OM_5}$ 是可构作的. 然后可构作 $\overrightarrow{OP_2} = 2\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OP_1}$，等等.

问题 367 如图 212，显然

$$\angle ANM = \angle ACM = 45°,$$
$$\angle MNB = \angle MEB = 45°, \quad \angle BNE = 90°,$$

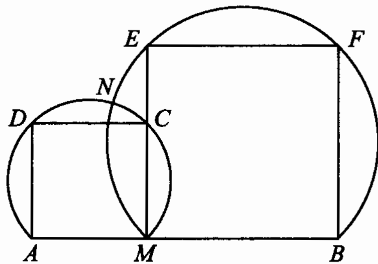


图 212

因此

$$\begin{aligned}\angle ANE &= \angle ANM + \angle MNB + \angle BNE\\ &= 180°,\end{aligned}$$

于是 A、N、E 共线. 进一步有

$$\begin{aligned}\angle ANB &= \angle ANM + \angle MNB\\ &= 45° + 45° = 90°,\end{aligned}$$

及

$$\angle ANC = 90°.$$

所以 N、B、C 共线.

问题 368 (1) $14n+3$ 和 $21n+4$ 的任何一个公因数也整除

$$3(14n+3) - 2(21n+4) = 1.$$

(2) $7an+4$ 和 $7bn+3$ 的任何一个公因数也整除

$$b(7an+4) - a(7bn+3) = 4b - 3a.$$

于是如果 $4b-3a=\pm1$，则 $7an+4$ 与 $7bn+3$ 互素. $4b-3a=1$ 的一般解为 $b=3t+1$，$a=4t+1$；$4b-3a=-1$ 的一般解为 $b=2+3t$，$a=3+4t$. 在后一情形下，令 $t=0$，则 $b=2$，$a=3$，即回答了问题(1).

问题 369 让我们约定，每一个人所认识的人的集合中都不包括他(或她)自己(否则，只要在他或她所认识的人数上加上 1 即可). 设有 n 个人出席了音乐会，且第 k 个人认识 a_k 个人. 显然对 $k=1, 2, \cdots, n$，$0 \leqslant a_k \leqslant n-1$. 然而，不可能有某个人谁也不认识，同时另一个人认识所有的人，即不可能有某个 i 和 j，使 $a_i=0$ 且 $a_j=n-1$. 因此 0 和 $n-1$ 不可能同时作为 a_k 的值而出现. 所以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中，只可能有 $n-1$ 个不同的值. 由鸽笼原理，必有两个 a_i 相等.

问题 370 观察在 $n=7$ 时的情形. 所列出的 7 对解的坐标之和为 1，2，3，4，5，6，7(虽然不是按此顺序). 这启发我们对一般情形考虑 $x+y$，并设法通过 $x+y$ 的和将解与 1，2，…，n 一一对应起来.

对 $x+2y=n$ 的任一解 (x, y)，我们有

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2}(x+2y) \leqslant x+y \leqslant x+2y \leqslant n;$$

而对满足 $\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$ 的任意整数 k，方程组

$$\begin{cases}x+2y=n,\\x+y=k\end{cases}$$

有唯一解$(x,y)=(2k-n,\ n-k)$.

类似地，对$2x+3y=n-1$的任一解(x,y)，我们有

$$\frac{n-1}{3}\leqslant x+y\leqslant\frac{n-1}{2};$$

而对满足$\frac{n-1}{3}\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}$的任意整数$k$，方程组

$$\begin{cases}2x+3y=n-1,\\x+y=k\end{cases}$$

有唯一解$(x,y)=(3k-(n-1),\ n-1-2k)$.

一般地，$ix+(i+1)y=n-i+1$的任一解$(x,\ y)$满足

$$\frac{n+1-i}{i+1}\leqslant x+y\leqslant\frac{n+i-1}{i};$$

而且对满足$\frac{n+1-i}{i+1}\leqslant k\leqslant\frac{n+i-1}{i}$的任意的$k$，方程组

$$\begin{cases}ix+(i+1)y=n-i+1,\\x+y=k\end{cases}$$

有唯一解

$$(x,\ y)=((i+1)k-(n+1-i),\ (n+1-i)-ik).$$

下面证明，对$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，存在唯一的整数i，使

$$\frac{n+1-i}{i+1}\leqslant k\leqslant\frac{n+1-i}{i}.$$

这一不等式等价于

$$\frac{n+1-k}{k+1}\leqslant i\leqslant\frac{n+1}{k+1}.$$

注意到

$$\frac{n+1-k}{k+1},\ \frac{n+2-k}{k+1},\ \cdots,\ \frac{n+(k+1)-k}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}$$

是$k+1$个分母是$k+1$的连续分数，从而其中恰有一个是整数i. 因此对每一个$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，我们恰好可以找到一个方程，使这个方程恰有一个解满足$x+y=k$.

问题 371　从一个计入$a(n)$的和式开始，比如

$$n=1+2+2+1+\cdots+2+1+1+2.$$

在前后各加上一个1，得

$$n+2=1+1+2+2+1+\cdots+2+1+1+2+1.$$

再将每一个2用1/1(用斜线隔开2个1)代替得

$$n+2=1+1+1/1+1/1+1+\cdots+1/1+1+1+1/1+1,$$

由此可得到一个计入$b(n+2)$的和式$n+2=3+2+\cdots+4+2$. 这个过程也可以反过来做，所以就建立了以1和2作为加数的$a(n)$个有序和与以大于1的数作为加数的$b(n+2)$个有序和之间的一一对应. 例如，

$5=1+1+1+1+1$
$\to 7=1+1+1+1+1+1+1$
$\to 7=7$,
$5=2+1+1+1$
$\to 7=1+2+1+1+1+1$
$\to 7=1+1/1+1+1+1+1$
$\to 7=2+5$,
$5=1+2+1+1$
$\to 7=1+1+2+1+1+1$
$\to 7=1+1+1/1+1+1+1$
$\to 7=3+4$,

等等.

问题 372　假设在第五轮赌博结束以后每人有x美元. 这就意味着在第五轮赌博开始时(也即第四轮赌博结束后)，A、B、C、D、E分别有

$$\frac{x}{2}、\frac{x}{2}、\frac{x}{2}、\frac{x}{2}、3x\text{ 美元};$$

在第四轮赌博开始时他们分别有

$$\frac{x}{4}、\frac{x}{4}、\frac{x}{4}、\frac{11x}{4}、\frac{3x}{2}\text{美元};$$

在第三轮赌博开始时他们分别有

$$\frac{x}{8}、\frac{x}{8}、\frac{21x}{8}、\frac{11x}{8}、\frac{3x}{4}\text{美元};$$

在第二轮赌博开始时他们分别有

$$\frac{x}{16}、\frac{41x}{16}、\frac{21x}{16}、\frac{11x}{16}、\frac{3x}{8}\text{美元};$$

在第一轮赌博开始时他们分别有

$$\frac{81x}{32}、\frac{41x}{32}、\frac{21x}{32}、\frac{11x}{32}、\frac{3x}{16}\text{美元}.$$

使这些"初始数"都是整数的最小整数 x 是 32，从而他们开赌时的各人最小赌资分别是 81、41、21、11、6 美元.

问题 373 由

$$\sum_i r_i = \sum_j c_j = \sum_{i,j} a_{ij},$$

得$\sum_i (r_i - c_i) = 0$. 因此或者对所有的 i，$r_i - c_i = 0$；或者存在 i 和 j，使 $r_i - c_i > 0$，且 $r_j - c_j < 0$. 无论是哪种情形，都能得到所要的不等式.

问题 374 对任意的正整数 n 和任意的实数 b，

$$\begin{aligned} & f(0) - f(b) \\ = & f(0) - f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{2b}{n}\right) \\ & + \cdots + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & |f(0) - f(b)| \\ \leqslant & \left|f(0) - f\left(\frac{b}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{2b}{n}\right)\right| \\ & + \cdots + \left|f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right)\right| \\ \leqslant & \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\ = & n\left(\frac{b^2}{n^2}\right) = \frac{b^2}{n}. \end{aligned}$$

固定 b，令 n 不断增加，即可推出

$$|f(0) - f(b)| = 0.$$

即 $f(b) = f(0)$.

问题 375 考虑汽车的速度函数 $v(t)$（t 的单位为时，v 的单位为 kph）的图象（见图 213，其中 T 是汽车行驶这 1 千米所用的时间）. 曲线在任意一点的切线的斜率等于汽车的加速度. 由于加速度不增加，切线的斜率（当 t 增加时）也不增加，即切线按顺时针方向旋转，而从不按逆时针方向旋转.

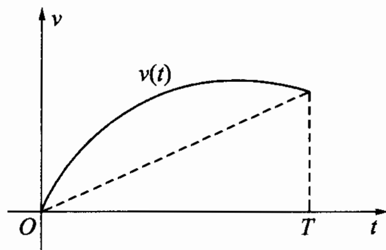


图 213

换句话说，函数 $v(x)$ 是凹函数，或 $v(x)$ 的图象是向下凹的. 曲线下方的面积等于汽车所行驶的路程（即 1 千米），并且不小于以 (0,0)，(T, 0)，(T, 240) 为顶点的三角形的面积. 因此$\frac{1}{2}(240)T \leqslant 1$（曲线下方的面积）. 于是 $T \leqslant \frac{1}{120}$，即汽车最多需要行驶 30 秒.

问题 376 令 w_n 表示第 n 个跳蚤（由最底层数起）的重量，则

$$w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n},$$

$$n = 1, 2, \cdots, \quad \text{且 } w_1 = \sqrt{2}.$$

如果数列 $w_1, w_2, \cdots$ 收敛，不妨设收敛于 L，则 $L = \sqrt{2 - L}$，从而 L 必等于 1. 现在我们证明，该数列确实收敛于 1. 容易知道，w_n 交替地大于和小于 1，因此我们每隔一项考察 w_n 与 1 的关系.

$$\begin{aligned} 1 - w_{n+2}^2 = w_{n+1} - 1 = & \sqrt{2 - w_n} - 1 \\ = & \frac{1 - w_n}{1 + \sqrt{2 - w_n}}. \end{aligned}$$

因此

$$1 - w_{n+2} = \frac{1 - w_n}{(1 + w_{n+2})(1 + \sqrt{2 - w_n})}.$$

如果 $w_n < 1$，则

$$w_{n+2}<1, \quad 且 \quad 1-w_{n+2}<\frac{1-w_n}{2};$$

如果 $w_n>1$，则

$$w_{n+2}>1, \quad (1+w_{n+2})(1+\sqrt{2-w_n})>2,$$

且

$$w_{n+2}-1<\frac{w_n-1}{2}.$$

因此 $|w_{n+2}-1|<\frac{1}{2}|w_n-1|$. 在两种情形下都有

$$|w_n-1|<\frac{1}{2^{[\frac{n}{2}]}}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|w_n-1|=0.$$

问题 377 注意到

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

所以 $1-r=-r^2$，$r^3=-1$，$r^4=-r$，$r^5=-r^2$，且 $r^6=1$. 于是

$$S_n=r^n+(1-r)^n=r^n+(-1)^n r^{2n},$$

从而我们有

$$S_{6m}=1+1=2,$$
$$S_{6m+1}=r-r^2=1,$$
$$S_{6m+2}=r^2+r^4=-1,$$
$$S_{6m+3}=r^3-r^6=-2,$$
$$S_{6m+4}=r^4+r^8=-r+r^2=-1,$$
$$S_{6m+5}=r^5-r^{10}=-r^2+r=1.$$

这与所要证明的结果一致.

问题 378 莱姆布雷恩先生是在浪费他的时间. 不切开一块草皮，他是永远不能把这片地铺满的. 为了简捷地证明这一点，我们把这块地划分成边长为 1 英尺的一些小正方形，并且一块隔一块地涂上黑色(见图 214). 显然，如果要铺满整片地，每一块草皮都要覆盖两块相邻的小正方形——一块黑的一块白的. 因此，31 块草皮要覆盖 31 块白正方形和 31 块黑正方形. 但图形中却有 32 块黑正方形和 30 块白正方形. 所以这个任务是永远不能够完成的.

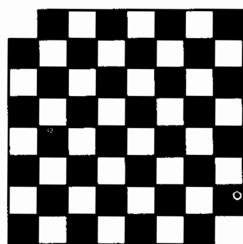


图 214

问题 379 问题的第一部分可用数学归纳法证明. 首先注意到

$$Q^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times0\\ 1\times1+1\times0 & 1\times1+0\times0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}f_3&f_2\\f_2&f_1\end{pmatrix}.$$

假设当 $n=m\geqslant2$ 时，

$$Q^m=\begin{bmatrix}f_{m+1}&f_m\\f_m&f_{m-1}\end{bmatrix},$$

则

$$Q^{m+1}=Q^m\cdot Q$$
$$=\begin{bmatrix}f_{m+1}&f_m\\f_m&f_{m-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}f_{m+1}+f_m&f_{m+1}\\f_m+f_{m-1}&f_m\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}f_{m+2}&f_{m+1}\\f_{m+1}&f_m\end{bmatrix}.$$

因此，对 $n=2, 3, 4\cdots$，

$$Q^n=\begin{bmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{bmatrix}.$$

现在证明问题的第二部分. 由于

$$Q^{3n}=\begin{bmatrix}f_{3n+1}&f_{3n}\\f_{3n}&f_{3n-1}\end{bmatrix},$$

及

$$(Q^n)^3=\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}^3$$

$$=\begin{pmatrix} f_{n+1}^3+2f_{n+1}f_n^2+f_n^2f_{n-1} & f_{n+1}^2f_n+f_{n+1}f_nf_{n-1}+f_n^3+f_nf_{n-1}^2 \\ f_{n+1}^2f_n+f_{n+1}f_nf_{n-1}+f_n^3+f_nf_{n-1}^2 & f_{n+1}f_n^2+2f_n^2f_{n-1}+f_{n-1}^3\end{pmatrix},$$

比较第一行、第二列的元素得

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{n+1}^2f_n+f_{n+1}f_nf_{n-1}+f_n^3+f_nf_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}f_n(f_{n+1}+f_{n-1})+f_n^2+f_nf_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1}-f_{n-1})(f_{n+1}+f_{n-1})+ \\ &\quad f_n^3+f_nf_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1}^2-f_{n-1}^2)+f_n^3+f_nf_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3-f_{n+1}f_{n-1}^2+f_n^3+f_nf_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^2(f_{n+1}-f_n) \\ &= f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3. \end{aligned}$$

【习题】 导出关于 f_{3n+1} 和 f_{3n-1} 的等式.

问题 380 对 $n\geqslant 1$，序列

L_n: $(0,n),(1,n-1),(2,n-2),\cdots,(n,0)$

中的点(即直线 $x+y=n$ 上的点)映射到序列

$$I_n:\ \frac{n(n+1)}{2},\ \frac{n(n+1)}{2}+1,\ \frac{n(n+1)}{2}+2,\cdots,\ \frac{n(n+1)}{2}+n$$

中的整数. 易知 I_1，I_2，…互不相交，且它们的并集为全体正整数的集合.

【习题】 更一般地，设 N 是正整数数列. 证明：对每一个 $n\in N$，存在多项式 $F_n(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，使 F_n: $N^n\to n$ 是一个双射(即一一对应).

【评论】 关于这个问题的历史及其推广，参见 *Crux Mathematicorum* 10 (1984): 300—303.

问题 381 如图 215，V 的每一个面都是等边三角形，且边长为正四面体的棱长的一半. 共有 8 个这样的三角形，每一个都包含在这两个相交四面体之一的一个面中. 由对称性，V 是一个正八面体. 设星 U 的每个四面体"尖角"的体积为 v，则每个相交四面体的体积是 $2^3v=8v$，所以 V 的体积是 $8v-4v=4v$. 由于 U 是由 8 个四面体"尖角"和正八面体 V 组成，因此 U 的体积是 $4v+8v=12v$. 从而

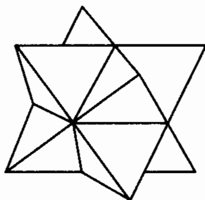


图 215

$$\frac{U\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}=\frac{12v}{4v}=3.$$

问题 382 由

$$\begin{aligned}(n^2+n)^2 &= n^4+2n^3+n^2 \\ &< n^4+2n^3+2n^2+2n+1 \\ &< n^4+2n^3+3n^2+2n+1 \\ &= (n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

可知 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 介于两个连续的平方数之间，因此这不可能是一个平方数.

一名高中生(在一篇关于著名音乐家的论说文里)写道：巴赫是世界上最著名的作曲家，亨德尔也是。亨德尔一半是德国人，一半是意大利人，一半是英格兰人。

问题 383 有 1、5、8、12 年下棋经历的棋手分在一队，有 2、3、10、11 年下棋经历的棋手分在另一队. 容易验证

$$1+5+8+12=2+3+10+11,$$
$$1^2+5^2+8^2+12^2=2^2+3^2+10^2+11^2,$$
$$1^3+5^3+8^3+12^3=2^3+3^3+10^3+11^3.$$

问题 384 最经济的运费是 290 美元，需要 4 辆大卡车、6 辆小卡车. 解决这个问题及类似问题的一个方法是作一个图，将大卡车的数量标于横坐标上，将总运送费用标于纵坐标上.

在本问题中，令 x 表示大卡车数量，y 表示小卡车数量，则

$$18x+13y\geqslant 150, \qquad (*)$$

而总费用

$$C=35x+25y.$$

对 $x=0, 1, 2, \cdots$ 我们求满足条件 $(*)$ 的 y 的最小值，然后计算与此相应的 C.

x	满足 $18x+13y\geqslant 150$ 的 y 的最小值	C
0	12	300
1	11	310
2	9	295
3	8	305
4	6	290
5	5	300
6	4	310
7	2	295
8	1	305
9	0	315

问题 385 为方便起见，我们从 7:00 开始算起，并使用直角坐标系，坐标系的原点为 S 的起始位置，且 x 轴的方向为射线 ST 的初始方向(见图 216). 设 S 在 x 和 y 方向的速度分量为 a 和 b，T 在 x 和 y 方向的速度分量为 c 和 d，单位均为 kph，则 t 小时以后

$$S=(at, bt), \quad T=(m+ct, dt).$$

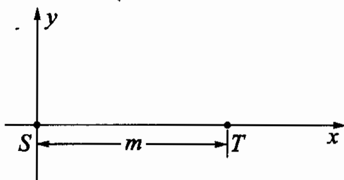


图 216

由距离公式

$$(m+3c-3a)^2+(3d-3b)^2=25,$$
$$(m+4c-4a)^2+(4d-4b)^2=16,$$
$$(m+6c-6a)^2+(6d-6b)^2=100.$$

令 $u=c-a$，$v=d-b$ 及 $u^2+v^2=x^2$，上述方程可简化为

$$\begin{cases} m^2+6mu+9x^2=25, \\ m^2+8mu+16x^2=16, \\ m^2+12mu+36x^2=100. \end{cases} \qquad (*)$$

相减得

$$\begin{cases} 2mu+7x^2=-9, \\ 4mu+20x^2=84. \end{cases}$$

解得 $x^2=17$，$mu=-64$.

(1) 由$(*)$式，$m^2=25+6\times 64-9\times 17=256$，或 $m=16$km(且 $u=-4$).

(2) 这时，有

$$m^2+2tmu+t^2x^2=26^2,$$

或

$$16^2-2\times 64t+17t^2=26^2,$$

或

$$(17t+42)(t-10)=0.$$

因此，两船在 17:00 时相距 26km，而且如果它们在 7:00 前 $\frac{42}{17}$ 小时正在航行的话，也正好相距 26km.

(3) 这时，两者相隔距离 $D^2(t)=256-128t+17t^2$. 配方得

$$D^2(t)=17\left(t-\frac{64}{17}\right)^2+\frac{256}{17}.$$

因此最近的距离是$\frac{256}{17}$km，发生在7:00 $+\frac{64}{17}$时.

(4) 这时，S 和 T 的横坐标相同，即 $at=m+ct$. 由于 $m=16$ 及 $c-a=u=-4$，我们有 $t=4$. 所以，如果 $b>d$，则在 11:00 时 S 在 T 的正北方.

(5) 这时，我们有 $T_x-S_x=T_y-S_y>0$. 从而

$$m+ut=vt>0,\quad u=-4.$$

由于 $v^2=x^2-u^2=17-16=1$，或 $v=\pm1$. 当 $v=1$ 时，$t=\frac{16}{5}$. $v=-1$ 不合题意.

(6) 这时，$a^2+b^2=c^2+d^2$ 且 $c=0$. 由 $c-a=u=-4$ 得 $a=4$. 又由$(d-b)^2+a^2=17$ 得 $d-b=\pm1$. 解 $d^2-b^2=16$ 和 $d-b=\pm1$得 $d=-\frac{17}{2}$，$b=-\frac{15}{2}$(注意 d 必须是负的). 所以，S 是以$\sqrt{4^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{17}{2}$kph 的速度向南偏东 $\arctan\frac{8}{15}$弧度的方向航行.

问题 386 (1) 正六边形与正三角形的面积之比是$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

(2) 如图 217，这两个正六边形的面积之比等于$\triangle OPQ$ 与$\triangle ORS$ 的面积之比，这个比值等于$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}$. 设圆半径为 r，则$\overline{OA}=r$，$\overline{OB}=\frac{\sqrt{3}r}{2}$，从而$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}=\frac{4}{3}$.

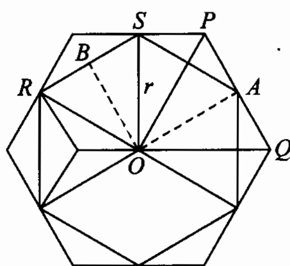


图 217

另一更简捷的解答可由图 217 得出.

【习题】 证明：圆的外切正 n 边形与内接正 n 边形的面积之比是 $\sec^2\frac{\pi}{n}$.

问题 387 如图 218，设 D 为由 C 向 AP 所作垂线的垂足，于是 $D\neq P$，且$\angle PCD=30^\circ$. 则$\overline{PD}=\frac{1}{2}\overline{PC}=\overline{PB}$，从而$\triangle BPD$ 是等腰三角形，且$\angle PBD=\angle PDB=30^\circ$. 进一步有

$$\begin{aligned}\angle DBA&=\angle CBA-\angle PBD\\&=45^\circ-30^\circ=15^\circ,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\angle PDB&=\angle DAB+\angle DBA\\&=\angle DAB+15^\circ=30^\circ,\end{aligned}$$

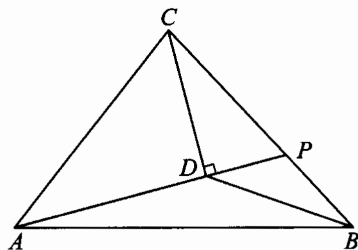


图 218

于是$\angle DAB=15^\circ$，$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$，所以$\angle DAC=\angle DCA=45^\circ$，且$\angle ACB=75^\circ$.

问题 388 设$\triangle PAB$ 为直角三角形，角 θ 如图 219 所示. $\triangle PAB$ 的面积是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{PB}&=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\\&=\frac{ab}{\sin 2\theta},\end{aligned}$$

则当 $\theta=45^\circ$时，此面积取最小值 ab.

【习题】 如果$\angle APB=\alpha$ 而非 90°，再解这

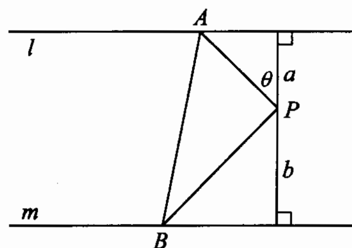


图 219

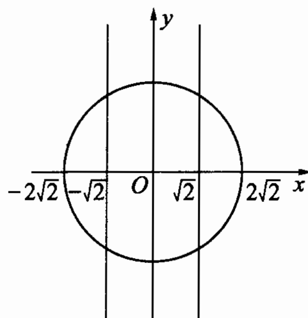


图 220

道问题，证明 $\theta=\frac{\pi-\alpha}{2}$.

问题 389 如果 $3x^2+y^2-12$ 和 x^2-y^2+4 同是正的或同是负的，则方程成为

$$3x^2+y^2-12=x^2-y^2+4,$$

或

$$x^2+y^2=8.$$

圆上的点是否都在曲线上呢？回答是肯定的. 原因是，如果(x, y)满足 $x^2+y^2=8$，则

$$|3x^2+y^2-12|=|2x^2-4|=|x^2-y^2+4|.$$

如果 $3x^2+y^2-12$ 和 x^2-y^2+4 异号，则方程成为

$$3x^2+y^2-12=-(x^2-y^2+4),$$

或

$$|x|=\sqrt{2}.$$

进一步容易证明，如果(x, y)在曲线$|x|=\sqrt{2}$上，则它也在给定的曲线上. 因此所求图形为曲线 $x^2+y^2=8$ 和直线 $x=\sqrt{2}$及$x=-\sqrt{2}$的并集，如图 220.

问题 390 对任意一个二次剩余 $r \pmod p$，存在整数 y $(1\leqslant y\leqslant p-1)$，它的平方与 r 同余，即

$$y^2\equiv r \pmod p, \quad 1\leqslant y\leqslant p-1.$$

显然 $p-y$ 也满足同样的条件：

$$(p-y)^2\equiv r \pmod p, \quad 1\leqslant p-y\leqslant p-1.$$

(且 $y+(p-y)=p$.) 另一方面，如果

$$y_1^2\equiv y_2^2 \pmod p, \quad 1\leqslant y_1<y_2\leqslant p-1,$$

则 p 整除 $y_1^2-y_2^2=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$. 因为 p 不整除 y_1-y_2，所以 p 整除 y_1+y_2，因此 $y_1+y_2=p$，即 $y_2=p-y_1$. 由此可知，序列 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, (p-1)^2$ 通过两次关于模 p 的二次剩余 $r_1, r_2, \cdots, r_q\left(q=\frac{p-1}{2}\right)$，所以

$$\begin{aligned}&2(r_1+r_2+\cdots+r_q)\\ \equiv&1^2+2^2+\cdots+(p-1)^2 \pmod p\\ =&\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}.\end{aligned}$$

问题 391 容易知道

$$\angle DAE=\alpha+\beta=90°,$$

因此

$$\angle ADE=\angle AED=45°(\text{见图 } 221).$$

从而

$$\angle ACB=180°-(\angle ADE+\alpha)=135°-\alpha,$$

且

$$\alpha+\angle CBA=45°,$$

所以

$$\begin{aligned}\angle ACB-\angle CBA&=(135°-\alpha)-(45°-\alpha)\\&=90°.\end{aligned}$$

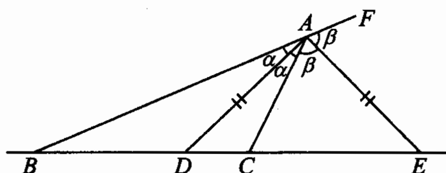


图 221

问题 392 (1) 得到的一般规律为：

$$(n^3+1)^3+(2n^3-1)^3+(n^4-2n)^3=(n^4+n)^3,\quad n=2,3,4,\cdots.$$

(2) 得到的一般规律为：

$$(3n^2)^3+(6n^2-3n+1)^3+[3n(3n^2-2n+1)-1]^3=[3n(3n^2-2n+1)]^3,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

(3) 得到的一般规律为：

$$(3n^2)^3+(6n^2+3n+1)^3+[3n(3n^2+2n+1)]^3=[3n(3n^2+2n+1)+1]^3,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

问题 393 每一种分割都将 P 分割成 $n+2m-2$ 个三角形. 我们对 m 用数学归纳法来证明. 当 $m=0$ 时，唯一的分割法就是画 $n-3$ 条对角线，而这样做总产生 $n-2$ 个三角形. 这说明公式对 $m=0$ 成立. 假定公式对一给定的值 k 成立. 如果新添加进去的内点在一个已分割成的三角形之内，则这一点必须与此三角形的三个顶点相连，这就将 1 个三角形换成了 3 个三角形，从而使三角形的总数增加了 2. 如果新添加进去的内点在某一条已画好的内部的线段上，则必须联结这点与以这条线段为公共边的两个三角形的相对的顶点. 这样就将 2 个三角形换成了 4 个三角形，从而也使三角形的总数增加了 2. 因此，在任何情形下，添加一个内点就使三角形的总数增加 2. 这就完成了证明.

另一解法是通过两种不同的途径计算所有三角形的内角的和. 如果有 k 个三角形，则内角和为 $k\cdot180°$. 该内角和也等于多边形 P 的内角和加上所有在点 Q_i 处的内角和，即

$$k\cdot180°=(n-2)180°+m\cdot360°,$$

因此

$$k=n+2m-2.$$

关于这一问题与皮克定理及欧拉公式的联系，参见 R. W. Gaskell, M. S. Klamkin and P. Watson: Triangulations and Pick's Theorem, *Math. Mag.* 49 (1976): 35－37.

问题 394 (问题由贾斯特(E. Just)和卡巴克(B. Kabak)提出，解答由凯罗利(L. H. Cairoli)给出.) 不等式可由下面两个熟知的关系式立即得到：

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C, \tag{1}$$

$$\cos^3A+\cos^3B+\cos^3C\geqslant3\cos A\cos B\cos C. \tag{2}$$

不等式(2)成立是由于

$$\cos^3A+\cos^3B+\cos^3C-3\cos A\cos B\cos C=(\cos A+\cos B+\cos C)\frac{(\cos B-\cos C)^2+(\cos C-\cos A)^2+(\cos A-\cos B)^2}{2}, \tag{3}$$

及

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

> 出题不是一件简单的事。题目绝对不能太容易，但也不能难得让人丧失信心。有时候很难确定一个问题是不是容易。在知道解答的情况下，它可能显得很容易。
>
> L. J. Mordell, "The Putnam Competition", *Amer. Math. Monthly* 70 (1963): 483

【评论】 比题中所给不等式更强的一个不等式是

$$\cos^n A+\cos^n B+\cos^n C\geqslant \frac{3}{2^n}, \qquad (4)$$

仅当三角形是等边三角形时等号成立.

【习题】 证明等式(1)和(3). 并至少对三角形是锐角三角形这一特殊情形证明(4).

问题 395 (1) 只要证明 R、B、P 共线且 $\overline{BP}=\overline{AQ}$ 即可. 因为这样对 $\triangle PQR$ 就有 $\angle PRQ=60^\circ$, $\overline{RP}=\overline{RQ}$, 由此即得结论. (平面)绕 C 按逆时针方向旋转 60° 使 A 落在 B 处, D 落在 P 处, 因此 $\triangle CAD\cong\triangle CBP$. 从而 $\overline{BP}=\overline{AD}$, 推出 $\overline{BP}=\overline{AQ}$, 且由 $\angle CBP=\angle CAD$, 推出 R、B、P 共线.

(2) 如图 222, 设 X、Y、Z、U、V 分别是 PE、AQ、RD、QE、RA 的中点. 则 $ZV/\!/DA$, $YU/\!/AE$, 且

图 222

$$\overline{ZV}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\overline{YU}.$$

又

$$\overline{VY}=\frac{1}{2}(\overline{RA}+\overline{AQ})=\frac{1}{2}\overline{RQ}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\overline{UX},$$

且 $\angle YVZ=120^\circ=\angle YUX$. 因此 $\triangle YVZ\cong\triangle XUY$, 所以 $\overline{YZ}=\overline{YX}$, 且 $\angle VYZ=\angle UXY$. 于是

$$\begin{aligned}\angle ZYX&=180^\circ-(\angle VYZ+\angle QYX)\\&=180^\circ-[\angle VYZ+180^\circ-(\angle YQX+\angle YXQ)]\\&=60^\circ.\end{aligned}$$

由此得 $\triangle XYZ$(作为顶角是 60° 的等腰三角形)是一个等边三角形.

问题 396 解法一(综合法): 如图 223, 以 O 为圆心的圆交纵坐标于点 A 和 C. BC 与 OE 交于点 D. 今证点 F(定圆与 OE 的交点)是 DE 的中点. 由于 $\angle ABC$ 是直径所对的圆周角,

图 223

$$\angle DBE=\angle CBA=90^\circ.$$

由于圆心角是同弧所对的圆周角的两倍, 又由于 $\overline{OB}=\overline{OC}$,

$$\angle AOB=2\angle ACB=2\angle OBC.$$

由于 $\angle OBF=90^\circ=\angle DBE$,

$$\angle OBC=\angle FBE.$$

又由于 AOC 与定圆相切,

$$\angle AOB=\angle OFB.$$

因此

$$\begin{aligned}\angle FBE+\angle FEB&=\angle OFB=\angle AOB\\&=2\angle OBC=2\angle FBE,\end{aligned}$$

从而 $\angle FEB=\angle FBE$, 所以 $\overline{BF}=\overline{FE}$. 又 $\angle FBD=90^\circ-\angle FBE=90^\circ-\angle ACB=\angle FDB$, 所以 $\overline{DF}=\overline{BF}=\overline{FE}$. 由此得 F 平分 DE. 随着变圆逐渐变小, 点 B 和 C(因而也有 D)逐渐向 O 移动. 从而 E 向外移向一点 P, 使 F 平分 OP.

解法二(解析法): 当 $6x=h^2$ 时, 圆

$$(x-3)^2+y^2=9 \quad 与 \quad x^2+y^2=h^2$$

相交, 交点为 $\left(\frac{h^2}{6}, \frac{h\sqrt{36-h^2}}{6}\right)$. 过 $A(0, h)$ 和 $B\left(\frac{h^2}{6}, \frac{h\sqrt{36-h^2}}{6}\right)$ 的直线是

$$y-h=\frac{(\sqrt{36-h^2}-6)x}{h}.$$

这条直线与 x 轴的交点为 $E(6+\sqrt{36-h^2},0)$. 因此，随着 $h\to 0$，点 E 逐渐向外移向点$(12,0)$.

问题 397 解决这一问题的一条途径是考虑一个正有理数 v 是怎样产生的. 由 $u>0$，$u+1>1$ 及$\frac{u}{u+1}<1$ 可知，如果 $v>1$，则 v 有唯一的由 $u+1=v$ 所确定的"祖先"u；如果 $v<1$，则 v 有唯一的由 $v=\frac{u}{u+1}$所确定的"祖先"u. 容易验证，在这两种情形下，v 的分子和分母的和都大于它的唯一"祖先"的分子和分母的和. 这提示我们，问题适合用数学归纳法证明.

对 $1=\frac{1}{1}$结论显然成立，因为这是唯一的分子和分母之和为 2 的正有理数. 假定结论对所有分子和分母之和为 $k\geqslant 2$ 的正有理数成立. 设 $v=\frac{p}{q}$是最简分数，其中 $1\leqslant p$，$1\leqslant q$，$p+q=k+1$. 则如果 $p>q$，v 是由$\frac{p-q}{q}$确定的唯一"后代"；如果 $p<q$，v 是由$\frac{p}{q-p}$确定的唯一"后代". 由归纳假设，这两个"祖先"中的任何一个都是以唯一方式确定的 1 的"后代".

问题 398 设四边形边长为 a、b、c、d，且 $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，其中任何三个数的和都严格大于第四个数. 特别地，我们有

$$d<a+b+c\leqslant 3d.$$

因为 $a+b+c$ 是 d 的倍数，所以仅有两种可能. 其一是 $a+b+c=3d$，这要求 $a=b=c=d$，此时结论成立.

以下假设 $a+b+c=2d$. 由已知条件，存在整数 w，使 $a+b+d=wc$. 因此

$$2a+2b+(a+b+c)=2wc,$$

所以

$$(2w-1)c=3(a+b)\leqslant 6c.$$

于是 $w\leqslant 3$. 又因为 $d\geqslant c$，所以 $w\neq 1$.

设 $w=2$. 则 $3(a+b)+c=4c$，所以 $a+b=c$，且 $2d=a+b+c=2c$. 因此 $c=d$. 结论成立.

另一方面，令 $w=3$. 则 $3(a+b)=5c$，且

$$3d=a+b+c+d=(a+b+d)+c=4c.$$

存在整数 u 和 v，使

$$b+c+d=ua,\quad a+c+d=vb.$$

由这两式与 $a+b+d=3c$，$a+b+c=2d$，可得

$$a-d=2d-ua,\quad b-d=2d-vb.$$

因此

$$a=\frac{3d}{u+1},\quad b=\frac{3d}{v+1}.$$

于是

$$c=\frac{3}{5}(a+b)=\frac{9d}{5}\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\right)$$
$$=\frac{12c}{5}\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\right).$$

所以

$$\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}=\frac{5}{12}.$$

显然 $u\geqslant v$，从而 $u=11$，$v=2$ 或 $u=5$，$v=3$. 由于 $vb=a+c+d\geqslant a+2b$，前者是不可能成立的. 对后者，可得 $b=\frac{3d}{4}=c$. 这就证明了在所有情形下结论成立.

问题 399 先来看相邻的两行 A 和 B. 设 A 行中有 r 个红点与 B 行中的红点相邻，b 个蓝点与 B 行中的蓝点相邻，u 个红点与 B 行中的蓝点相邻，v 个蓝点与 B 行中的红点相邻. 从而有 r 条红色线段和 b 条蓝色线段联结 A 与 B 中的点. A 中有 $r+u$ 个红点与 $b+v$ 个蓝点，而 B 中有 $r+v$ 个红点与 $b+u$ 个蓝点. 因此 $r+u=b+v$，且 $r+v=b+u$.

从而 $r-b=v-u=-(v-u)$，所以 $r=b$. 因此，在相邻的两行之间，红色线段的条数等于蓝色线段的条数. 同样的推导对于相邻的两列也成立. 这就证明了结论.

问题 400 如果每个人都与其他人相识，则结论显然成立. 假设 A 与 B 不相识. 令 X 为任意第三个人. 如果 X 不认识除 A 和 B 外的一个人，比如 Y，则 $\{A, B, X, Y\}$ 这四个人中将没有一个人认识其余三个人. 因此，X 除了可能不认识 A 或 B 外，认识其余的每一个人.

设 C 是 A 和 B 外的另一个人，并且不认识所有的人. D 是任意第四个人. 由上面的讨论可知，除 A 和 B 外，C 和 D 认识所有其余的人. 又由于 C 至少不认识 A 与 B 中的一个，所以 D 一定在 $\{A, B, C, D\}$ 中认识其余三个人. 所以 D 一定认识每一个人. 因此 A，B，C 是这次聚会上不认识所有人的仅有的三个人.

问题 401 考虑内接正 n 边形的外接圆. 这个圆与给定的正 n 边形的每一边都相交，且当该圆与给定的正 n 边形相切时其半径最小. 余下的证明就很自然了.

问题 402 由第一个方程得

$$(z-x)(1-S)=y-z,$$

其中 $S=x+y+z$. 同样有

$$(x-y)(1-S)=z-x,$$

$$(y-z)(1-S)=x-y.$$

从而

$$(x-y)(y-z)(z-x)[(1-S)^3-1]=0,$$

且这个方程的每一个解都导致 $x=y$. 于是

$$x^2+(1-x-y)^2+(1-y)^2$$
$$=2-6x(1-x).$$

因此所求最小值是 $2-\frac{6}{4}=\frac{1}{2}$，且当 $x=\frac{1}{2}$ 时可取到.

【说明】 从几何上看，这个问题等价于求内接于给定等边三角形的最小等边三角形. 凭直觉可知，这个最小三角形的顶点应在给定三角形的各边中点上.（参见问题 401.）

问题 403 方程可改写为

$$(x^2+1)^2=2(x+1)^2.$$

于是

$$x^2+1=\pm\sqrt{2}(x+1).$$

这两个二次方程的解就是所要求的解.

【习题】 求解更一般的四次方程：

$$x^4-4x=\frac{2}{k}-k^2.$$

问题 404 不失一般性，可假定对任意的实数 x，$P(x)>Q(x)$. 则

$$P(P(x))>Q(P(x))$$
$$=P(Q(x))>Q(Q(x)),$$

由此即得结论.

问题 405 消去（$*$）式中的分母，再分解因式得

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0.$$

从而 $a=b+c$ 或 $b=a+c$ 或 $c=a+b$. 这三个式子中的每一个都将（$*$）式左边的三个分式简化为按某种次序排列的数 2，2，-2. 因此 P 为常数 -8.

问题 406 设 $\sqrt[3]{a}$、$\sqrt[3]{b}$、$\sqrt[3]{c}$ 为三次方程

$$x^3-px^2+qx-r=0 \qquad (1)$$

的 3 个根，则

$$S_1=p,$$
$$S_2=p^2-2q,$$
$$S_3=pS_2-qS_1+3r=p^3-3pq+3r,$$
$$S_n=pS_{n-1}-qS_{n-2}+rS_{n-3} \quad (n>3).$$

因此，如果 p、q、r 都是整数，则所有的幂和 S_n 都是整数. 剩下的是要选择 p、q、r，使(1)式的根都是实数，但却不是整数. 这是容易办到的. 比如

$$P(x) \equiv x^3 - 100x^2 + x + 1 = 0. \quad (2)$$

由于 $P(0)=1$，$P(1)=-97$，$P(100)=101$，方程在区间(0，1)和(1，100)中有实数根. 因为三个根的和为 100，所以第三个根也是实数. 又因为(2)式的可能的整根必是常数项 1 的因子，所以方程的三个根都不是整数. 因此方程(2)的三个根的立方可作为三元实数组(a，b，c)的一种取法，且类似这样的方程有无限多个.

问题 407 结果可由下列更强的不等式导出：

$$\frac{n+2}{S} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i},$$

或等价地有

$$2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}. \qquad (*)$$

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. 由于 $S-a_1 \geqslant S-a_n \geqslant a_n$，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S-a_n} + \frac{S-a_n}{S-a_n} = 2.$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2} = 0$，$a_{n-1} = a_n$(退化的多边形)时等号成立. ($*$)式在 $n=3$ 时的特殊情形刊于 O. Bottema, et al, *Geometric Inequalities*, Walters-Noordhoff, Gröningen, 1969, p. 15.

问题 408 考虑将椭圆在另一适当平面变为圆的平行射影，这个射影保持平行性，因此将矩形变为平行四边形. 但由于该平行四边形内接于圆，所以它仍然必须是矩形. 现在如果考虑反变换，则椭圆的轴对应于圆的直径，而这两条直径分别平行于它的内接矩形的边.

推广及另一证明：由于矩形的对角线互相平分且相等，我们首先证明：一个椭圆的两条互相平分的等弦的交点一定是椭圆的中心. 这个结果对于严格凸的中心对称的区域也成立. 我们采用间接证法.

如图 224，假定两条互相平分的等弦 AB 和 CD 的交点不是这个区域的中心. 由 AB 和 CD 关于中心的反射可得到另外两条互相平分的弦 $A'B'$ 和 $C'D'$. 则有

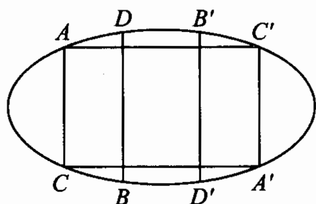


图 224

$$\overline{AC} = \overline{DB} = \overline{B'D'} = \overline{C'A'},$$
$$AC /\!/ DB /\!/ B'D' /\!/ C'A'.$$

这导致矛盾，因为一个严格凸的区域至多有两条平行的等弦(由凸性，两条内弦一定比两条外弦长).

对于一个平行四边形，如果它是一个内接于椭圆的矩形，则两条对角线一定等长，且被对称地置于椭圆内.

更一般地，如果给定了一个具有两条互相垂直的对称轴的严格凸的区域，且它的由 O 出发的向径的长度由 B 到 C 是单调递减的(见图 225)，则其所有内接矩形的边都平行于 AB 和 CD.

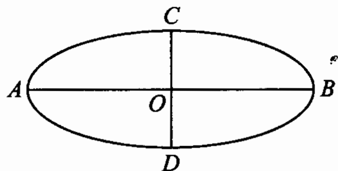


图 225

问题 409 由问题 408 知，矩形的边一定平行于椭圆的轴. 因此四个顶点的坐标形如($\pm h$，$\pm k$). 我们希望求出在限制条件 $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ 下面积 $A = 4hk$ 的最大值. 由算术-几何平均值不等式，

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\geqslant\frac{hk}{ab},$$

当且仅当$\frac{h^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}=\frac{1}{2}$时等号成立. 因此面积最大值为 $4\frac{ab}{2}=2ab$.

【说明】 许多教科书上都假定矩形的边平行于椭圆的轴. 虽然这很直观，但却是需要证明的.

【习题】 求 h^mk^n 的最大值，其中 m 和 n 为给定的正整数，且满足$\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$.

问题 410 设 $w=re^{i\alpha}$，$z=se^{i\beta}$，其中 r 和 s 分别表示 w 和 z 的绝对值. 问题变为要证明：

$$2|re^{i\alpha}-se^{i\beta}|\geqslant(r+s)|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|,(*)$$

或

$$4[(r\cos\alpha-s\cos\beta)^2+(r\sin\alpha-s\sin\beta)^2]$$
$$\geqslant(r+s)^2[(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2],$$

或等价于(经简化)

$$2[r^2+s^2-2rs\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\geqslant(r^2+s^2+2rs)[1-\cos(\alpha-\beta)],$$

或

$$(r-s)^2[1+\cos(\alpha-\beta)]\geqslant0.$$

当且仅当 $r=s$ 或 $\alpha-\beta=\pm\pi$ 时等式成立.

另一证明：在(*)式中，令 u、$-v$ 分别等于 $e^{i\alpha}$、$e^{i\beta}$，得

$$\left|\frac{r}{r+s}u+\frac{s}{r+s}v\right|\geqslant\left|\frac{u+v}{2}\right|.$$

这后一个不等式可借助于几何立即得到，即从等腰三角形的顶点到底边上任一点的距离不小于从顶点到底边的高的长度(见图 226).

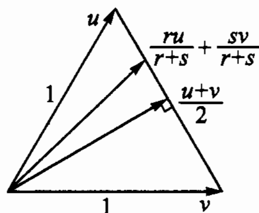


图 226

问题 411 以$(x-a)(x-b)$乘方程(1)的两边，得

$$(a-b)x^{n+2}-(a^{n+2}-b^{n+2})x+ab(a^{n+1}-b^{n+1})=0,\qquad(2)$$

不失一般性，可设 $a>b$.

情形(1)：n 为偶数，$a>b\geqslant0$. 方程(1)显然没有正根，下面证明方程(1)也没有负根. 因为方程(2)的系数的符号仅改变了 2 次，所以(根据笛卡儿正负号规则)方程(2)至多有两个正根. 这两个正根正好就是我们用$(x-a)(x-b)$乘方程的两边而产生的根 $x=a$，$x=b$. 将 x 改为 $-x$，则方程(2)的系数符号没有变化，所以方程(2)或方程(1)没有负根.

情形(2)：n 为偶数，$a\geqslant0>b$. 如果 $a^2>b^2$，则情况同前. 所以我们假定 $a^2<b^2$，则系数符号为+、+、−，这意味着方程(2)有一个正根. 将 x 改为 $-x$，系数符号变为+、−、−，这意味着方程(2)有一个负根. 因此方程(1)没有实根.

情形(3)：n 为偶数，$0>a>b$. 此时系数符号为+、+、+，这意味着方程(2)没有正根. 将 x 改为 $-x$，得符号为+、−、+，这意味着方程(2)有两个负根. 因此方程(1)也没有实根.

类似地，可考虑 n 为奇数时的上述三种情形，最后可得方程(1)至多有一个实根.

问题 412 首先注意到

$$(z-1)P(z)$$
$$=a_0z^{n+1}-(a_0-a_1)z^n-(a_1-a_2)z^{n-1}-\cdots-(a_{n-1}-a_n)z-a_n.$$

由于 a_0，a_0-a_1，a_1-a_2，…，$a_{n-1}-a_n$，a_n 都非负，由三角不等式得

$$|(z-1)P(z)|\geqslant a_0|z|^{n+1}-$$

$[(a_0-a_1)|z|^n+(a_1-a_2)|z|^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)|z|+a_n]$. $(*)$

如果 $|z|>1$，则 $(*)$ 式的右边大于或等于

$$a_0|z|^{n+1}-|z|^n[(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n]$$
$$=a_0|z|^n(|z|-1)>0,$$

或 $|P(z)|>0$. 所以 $|r|\leqslant1$.

问题 413 注意到，当 $n^2\leqslant k\leqslant(n+1)^2-1$ 时，

$$[\sqrt{k}\,]=n.$$

易知

$$S_n=1(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+\cdots+(n-1)[n^2-(n-1)^2]$$
$$=-1^2-2^2-3^2-\cdots-(n-1)^2+(n-1)n^2$$
$$=(n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6},$$

这给出了(1)式的解答.

对(2)式，注意到，当 $n^3\leqslant k\leqslant(n+1)^3-1$ 时，

$$[\sqrt[3]{k}\,]=n.$$

易知

$$T_n=1(2^3-1^3)+2(3^3-2^3)+\cdots+(n-1)[n^3-(n-1)^3]$$
$$=-1^3-2^3-3^3-\cdots-(n-1)^3+(n-1)n^3$$
$$=(n-1)n^3-\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$
$$=\frac{(n-1)n^2(3n+1)}{4}.$$

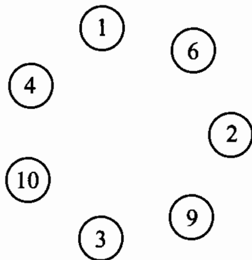
问题 414 如果这 7 个整数为 a_1，a_2，…，a_7，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_7+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_7+a_1)$$
$$=1+2+\cdots+14,$$

或

$$a_1+a_2+\cdots+a_7=35.$$

1 是必选的. 下面用尝试法来逐个确定其余的数. 由于 $5=1+4=2+3$，先将 4 置于 1 的旁边试试. 然后为了得到 14，将 10 置于 4 的旁边，依次类推. 最后得到一个正确的解：



【习题】 求出所有不同的正整数解.

问题 415 任何一种排列都可以！首先注意到 $3168=32\times99$.

被 32 除的余数仅依赖于被除数的最后五位数(因为 2^5 整除 10^5). 又因为

$$a10^n+b10^{n+2m}\equiv b10^n+a10^{n+2m}\pmod{99},$$

所以任意交换偶数位上的两个数字或奇数位上的两个数字，被 99 除的余数不变. 最后，

莱奥·莫泽与一家出版社签订了一份出书(一本问题集)的合同。每年，这家出版社的代表人都要问莱奥："你什么时候才能完稿啊?"当这个问题问到第七次时，莱奥答道："我要在我死后出版这本书。"那个代表人对此的反应是："好吧，没问题，但是你要快一点啊！"

$$39997 \equiv 1981 \pmod{3168}.$$

问题 416 应用

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

等三式，将原式展开，并分别用 u、v、w 代替 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$，得

$$\frac{u-v}{1+uv}+\frac{v-w}{1+vw}+\frac{w-u}{1+wu}=0.$$

通分并分解因式，得 $(u-v)(v-w)(w-u)=0$，因此所求三角形为等腰三角形.

问题 417 采用间接证法. 假定存在这样的 3 个素数 p_1、p_2、p_3，则 $cr^{n_1}=\sqrt[m]{p_1}$，$cr^{n_2}=\sqrt[m]{p_2}$，$cr^{n_3}=\sqrt[m]{p_3}$，其中 n_1、n_2、n_3 是 3 个不同的整数. 消去 c 得

$$r^{n_1-n_2}=\sqrt[m]{\frac{p_1}{p_2}}, \quad r^{n_2-n_3}=\sqrt[m]{\frac{p_2}{p_3}}.$$

再消去 r 得

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n_2-n_3}=\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{n_1-n_2}.$$

由唯一因子分解定理可知，这是不可能的. 有关等差数列项的相关问题，参见问题 182.

问题 418 采用间接证法. 假定存在两条平行的长度最大的弦，则这两条弦的端点是一个平行四边形的顶点. 而这个平行四边形至少有一条对角线比它的两条边都长.（如果平行四边形的两条边为 a 和 b，则对角线的平方为 $a^2+b^2\pm 2ab\cos\theta$.）这与假设矛盾，从而结论成立.

问题 419 考虑这两个图形的两条对应的最长的平行弦* AB 和 $A'B'$. 我们仅有两种对应 $A\leftrightarrow A'$，$B\leftrightarrow B'$ 或 $A\leftrightarrow B'$，$B\leftrightarrow A'$. 这两个位似中心就是 AA' 与 BB' 以及 AB' 与 $A'B$ 的交点. 注意，如果这两个图形还是全等的，则其中一个位似中心是“无穷远点”.

问题 420 取 3 个顶点的坐标为 $(a, 0, 0)$、$\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$ 和 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$，并设飞弹的坐标为 (x, y, h). 则

$$R_1^2=(x-a)^2+y^2+h^2,$$

$$R_2^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+h^2,$$

$$R_3^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+h^2.$$

展开得

$$R_1^2=b^2-2ax,$$

$$R_2^2=b^2+ax-\sqrt{3}ay,$$

$$R_3^2=b^2+ax+\sqrt{3}ay,$$

其中 $b^2=x^2+y^2+h^2+a^2$. 三式相加得 $R_1^2+R_2^2+R_3^2=3b^2$. 于是

$$ax=\frac{1}{2}(b^2-R_1^2),$$

$$\sqrt{3}ay=\frac{1}{2}(3b^2-2R_2^2-R_1^2).$$

由此得

$$x^2+y^2=\frac{(b^2-R_1^2)^2}{4a^2}+\frac{(3b^2-2R_2^2-R_1^2)^2}{12a^2}.$$

最后得

$$h^2=b^2-a^2-\frac{(b^2-R_1^2)^2}{4a^2}-\frac{(3b^2-2R_2^2-R_1^2)^2}{12a^2},$$

其中 $b^2=\frac{1}{3}(R_1^2+R_2^2+R_3^2)$.

问题 421 如果沿三条弦建立直角坐标系，

* 由前一题可知，两个图形在一个方向上至多只有一对最长的平行弦. 而且，如果两个图形有两个位似中心，则它们必须具有某种对称性，例如两个位似椭圆或位似平行四边形.

则 B 点坐标为$(2b, 0, 0)$，且(由对称性)球心 O 的坐标为$(b-a, d-c, f-e)$. 不失一般性，可假设 $b\geqslant a$，$d\geqslant c$，$f\geqslant e$. 我们有

$$R^2=\overline{OB}^2$$
$$=(b-a-2b)^2+(d-c)^2+(f-e)^2,$$

且由于 $ab=cd=ef$，

$$R^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-2ef.$$

问题 422 如果到某一步后有 r 张纸片，其中有 s 张不裁开，其余 $r-s$ 张每张又都裁成7张，则纸片数成为

$$s+7(r-s)=7r-6s\equiv r \pmod 6.$$

开始时 $r=7$，最后的纸片数为整数 x，$1988<x<1998$，且 $x\equiv 7 \pmod 6$，即 $x=1993=6\times 331+7$.

问题 423 考虑一条长为 $r=2^s+t$ 的线段，其中 s 和 t 都是正整数，且 $0<t\leqslant 2^s$. 我们希望将这条线段切割(允许重叠)成 r 条单位长度的线段. 第一次切割得长为 2^s 和 t 的两段，再用 s 次重叠切割就得到 r 条单位长度的线段了. 因为每一次切割不可能得到多于两倍的线段，所以少于 $s+1$ 次的切割不能达到目的.

由此可知，如果

$$a=2^m+d \quad (0<d\leqslant 2^m),$$
$$b=2^n+e \quad (0<e\leqslant 2^n),$$
$$c=2^p+f \quad (0<f\leqslant 2^p),$$

则将一个 $a\times b\times c$ 的立方体切割成 abc 个单位立方体最少需要 $m+n+p+3$ 次切割.

问题 424 设由一个顶点 O 到其余顶点的向量为$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$，其中$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$线性无关(见图 227). 由于对边平行，

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=-u\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=v(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}),$$
$$-\overrightarrow{OE}=w(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}).$$

相加得

$$-\overrightarrow{OC}=-w\overrightarrow{OC}+(w-v)\overrightarrow{OB}+(v-u)\overrightarrow{OA}.$$

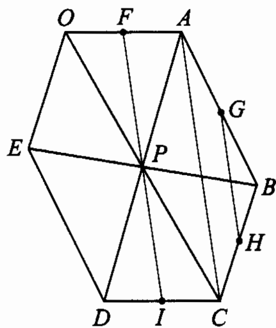


图 227

因为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$线性无关，所以 $w=1=v=u$. 因此，这个六边形的对边平行而且长度相等. 由于平行四边形对角线互相平分，因此三条对角线 OC、AD、BE 交于一点(设为 P)，且这个六边形是关于点 P 中心对称的. 从而只须证明 OA、AB、BC、CD 的中点 F、G、H、I 共面，而这可由 $GH /\!/ AC /\!/ FI$ 推出.

问题 425 设左边一个圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 如果 x 轴沿着联结圆心的直线，则另一圆的方程为$(x-2R)^2+y^2=R^2$. 从而自切点起沿左圆运动的质点的坐标为

$$x=R\cos\omega t, \quad y=R\sin\omega t,$$

其中 ω 表示角速度. 另一质点的坐标由下式给出：

$$x'-2R=R\cos(\pi+\omega t)=-R\cos\omega t,$$
$$y'=R\sin(\pi+\omega t)=-R\sin\omega t.$$

(x', y')相对于(x, y)的运动(x'', y'')由下式给出：

$$x''=x'-x=2R-2R\cos\omega t,$$
$$y''=y'-y=-2R\sin\omega t.$$

因此，$(x''-2R)^2+y''^2=(2R)^2$. 如果角速度不是常数，则将 wt 替换为 $F(t)=\int_0^t\omega\,\mathrm{d}t$，也可得同样结果.

问题 426 设抛物线方程为 $y=ax^2$，固定的内点为(h, k). 则过这一点的弦的直线簇方

程为 $y-k=m(x-h)$. 交点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 可通过解方程 $ax^2-k=m(x-h)$ 得到. 而弦的中点 (X, Y) 为

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2a},$$

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=m\frac{x_1+x_2}{2}+k-mh$$

$$=\frac{m^2}{2a}+k-mh.$$

消去 m 得 $Y=2aX^2-2ahX+k$, 或

$$Y-k+\frac{ah^2}{2}=2a\left(X-\frac{h}{2}\right)^2. \quad (*)$$

从而轨迹是原抛物线的一个平移仿射像.

要最终解决这个问题, 我们还必须证明轨迹 $(*)$ 上的每一点 (r, s) 都具有以下性质: 联结过 (r, s) 和 (h, k) 的直线与抛物线 $y=ax^2$ 的两个交点的弦的中点就是 (r, s). 过 (r, s) 和 (h, k) 的直线的斜率为

$$\frac{k-s}{h-r}=\frac{k-(2ar^2-2ahr+k)}{h-r}=2ar.$$

由解的前一部分可知, 由过点 (h, k) 且以此为斜率的直线所确定的弦的中点的横坐标为 $\frac{2ar}{2a}=r$. 结论得证.

问题 427 首先注意到, $\frac{(n+3)^2}{12}$ 绝不可能形如 $k+\frac{1}{2}$. 否则将有 $(n+3)^2=12k+6$, 因为左边同余于 0 或 1 (mod 4), 而右边却同余于 2 (mod 4), 所以这是不可能的. 现设 $g(n)=k$, 则

$$k-\frac{1}{2}<\frac{(n+3)^2}{12}<k+\frac{1}{2},$$

或

$$k-\frac{1}{2}<\frac{(n-3)^2+12n}{12}=\frac{(n-3)^2}{12}+n$$

$$<k+\frac{1}{2}.$$

因此

$$(k-n)-\frac{1}{2}<\frac{(n-3)^2}{12}<(k-n)+\frac{1}{2},$$

从而

$$G(n-6)=k-n=G(n)-n.$$

问题 428 (J. L. 赛尔弗里奇) 如果 $1, 2, \cdots, \left[\frac{m}{2}\right]$ 已从 $1, 2, \cdots, m$ 中选出, 则剩下的数中没有一个是另一个的因子. 这说明 $n<\left[\frac{m}{2}\right]$. 下面证明, 对任意的 $n\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]-1$, 一定有某两个满足 $b=2^k a$ 的 a 与 b 未被选中. 假定这样的 a 与 b 不存在, 则每一个序列 $r, 2r, \cdots, 2^s r$ 中, 除了一个以外其余的都要被选中. 如果 r 为奇数, 则这些序列是两两不交的. 现在我们来计算选出的个数. 注意到, 如果在每一个序列中除了最大的数外, 其余的都选, 则选出的数便是 $1, 2, \cdots, \left[\frac{m}{2}\right]$.

问题 429 考虑下面 6 个数:

$$N_1=1-f(1)-g(1)-h(1),$$
$$N_2=1-f(1)-g(1)-h(1),$$
$$N_3=0+f(0)+g(1)+h(1),$$
$$N_4=0+f(1)+g(0)+h(1),$$
$$N_5=0+f(1)+g(1)+h(0),$$
$$N_6=0-f(0)-g(0)-h(0).$$

因为 $\sum N_i=2$, 所以 N_i 中有一个至少是 $\frac{1}{3}$. 于是在

$$(x, y, z)=(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 0)$$

中, 至少有一个使所给的关系式成立. 为了证明 $\frac{1}{3}$ 是最佳的可能, 下面具体给出三个函数 f、g、h, 使其恰好得到 $\frac{1}{3}$.

设 $f(x)=g(x)=h(x)=\frac{3x-1}{9}$,

则

$$\begin{aligned}&|xyz-f(x)-g(y)-h(z)|\\=&\left|xyz-\frac{x+y+z}{3}+\frac{1}{3}\right|.\end{aligned}$$

现在只须证明对所有的 $0\leqslant x$、y、$z\leqslant 1$，

$$\frac{1}{3}\geqslant xyz-\frac{x+y+z}{3}+\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}.$$

因为表达式对每一个变量都是线性的，所以它的极值在端点处取到. 由此可得结论.

此问题的推广参见 *Mathematics Magazine*，62 (1989)：198；63 (1990)：194 — 197. 此问题的一个简化形式见于 1959 年普特南数学竞赛，问题 1325.

问题 430 考虑两个自然的情形，即正三棱锥在底面上的高趋于零或无穷大时的极端情形. 在前一情形下，各两面角将趋于 0，0，0，π，π，π；而在后一情形下，各两面角将趋于 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$.

问题 431 设

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{x_nt^n+x_{n-1}t^{n-1}+\cdots+x_1t+x_0}{x_{n-1}t^{n-1}+x_{n-2}t^{n-2}+\cdots+x_1t+x_0}\\&=1+\frac{x_n}{G},\end{aligned}$$

其中

$$G=\frac{x_{n-1}}{t}+\frac{x_{n-2}}{t^2}+\cdots+\frac{x_1}{t^{n-1}}+\frac{x_0}{t^n}.$$

因为每个 $x_i\geqslant 0$，G 随 t 的增大而递减，所以 $F(t)$是关于 t 的递增函数. 因此当且仅当 $a>b$ 时，

$$\frac{A}{C}=F(a)>F(b)=\frac{B}{D}.$$

问题 432 (D. 邓肯) 球面上交于不同点的 3 个大圆将球面分成两两对称并处于相对半球面的 8 个球面三角形. 设其中两个大圆交于 O 和 O'，且这两个大圆分别交第三个大圆于 A、A'和 B、B'. 在由过 A、B、A'、B' 的大圆为边界且包含 O 的半球面上，考察添加第四个大圆后所构成的图形. 这第四个大圆交第三个大圆于一条直径的两个端点 C、C'，交半圆 AOA'于 P，交半圆 BOB'于 Q. 由此构成$\triangle OPQ$，以及依次围绕在这个三角形四周的$\triangle AOB$、四边形 $BOPC$、$\triangle CPA'$、四边形 $A'PQB'$、$\triangle B'QC'$、四边形 $C'QOA$. 因此 4 个无相同交点的大圆在球面上总构成 8 个球面三角形和 6 个球面四边形.

再次考虑以第三个大圆为边界且包含前述图形的半圆. 设第五个大圆交第三个大圆于 D 和 D'，这两个点中，其中一个一定在某个三角形的一条边上，而另一个必在某个四边形的一条边上. 不妨设 D 在$\triangle AOB$ 的 AB 边上，D'在四边形 $A'PQB'$ 的 $A'B'$ 边上. 注意到$\triangle OPQ$ 的边也是各四边形的边. 于是 DD' 可能经过也可能不经过$\triangle OPQ$.

如果 DD'经过$\triangle OPQ$，则它一定与三角形的两条边相交，从而将$\triangle OPQ$ 分成 1 个三角形和 1 个四边形. 半圆 DD'必定也将$\triangle AOB$ 分成 1 个三角形和 1 个四边形，将它进入$\triangle OPQ$ 处的那个四边形分成 1 个三角形和 1 个五边形，并将四边形 $A'PQB'$分成 2 个四边形. 因此第五个大圆在这个半球面上产生了一个包含 5 个三角形、5 个四边形和 1 个五边形的图形.

如果 DD'不经过$\triangle OPQ$，则它一定经过 4 个连续的球面多边形，因此将$\triangle AOB$ 分成 1 个三角形和 1 个四边形，将与之相邻的四边形分成 2 个四边形，将下 1 个相邻的三角形分成 1 个三角形和 1 个四边形，并且将四边形 $A'PQB'$分成 1 个三角形和 1 个五边形. 于是也得到 5 个三角形、5 个四边形和 1 个五边形.

因此，由任何 3 个都不共点的 5 个大圆，可在球面上得到一个由 10 个三角形、10 个四边形和 2 个五边形所构成的图形. 进一步研究可知，第六个大圆或者保持五边形不

变，或者将五边形分成1个五边形和1个四边形，或者将五边形分成1个三角形和1个六边形. 因此，如果球面上有 n 个大圆($n \geqslant 5$)，且其中任何3个都不共点，则至少确定一个有5边或更多边的球面多边形.

问题 433 任何一个满足 $x+y=0$ 的三元组显然都是解. 因此由对称性及因子定理，

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$
$$=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

于是所有的解都由 $x+y=0$，或 $y+z=0$，或 $z+x=0$ 给出.

问题 434 如果 $\sin x+\cos x=0$，则 $x=\frac{3\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$. 否则，分离出因子 $\sin x+\cos x$ 后得

$$\begin{aligned}11 &=16(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+\\ &\quad \sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)\\ &=16(1-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x),\end{aligned}$$

或等价地有

$$(4\sin x\cos x-1)(4\sin x\cos x+5)=0.$$

此方程仅有的可能的解满足

$$\sin x\cos x=\frac{1}{4},$$

或

$$\sin 2x=\frac{1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

从而全部所要求的 x 的值为 $\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{9\pi}{12}$，$\frac{13\pi}{12}$，$\frac{17\pi}{12}$，$\frac{21\pi}{12}$.

问题 435 观察这个数列的前几项：1，1，1，2，3，7，11，26，…，我们猜想

$$a_{n+2}=4a_n-a_{n-2}\quad (n=3,4,5,\cdots).$$

这可用数学归纳法加以证明. 假定上式对 $n=k-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}a_{k-1}a_{k+2}&=1+a_{k+1}a_k\\ &=1+(4a_{k-1}-a_{k-3})a_k\\ &=4a_{k-1}a_k-a_{k-1}a_{k-2}.\end{aligned}$$

因此结论成立. 由此可知，如果 a_1，a_2，…，a_{n+1} 都是整数，则 a_{n+2} 也是整数.

【习题】 也可猜测，对 $k=1,2,\cdots$，$a_{2k+1}=2a_{2k}-a_{2k-1}$，$a_{2k+2}=3a_{2k+1}-a_{2k}$. 证明这两个等式，并给出本问题的另一个解答.

问题 436 设 m 为 a 和 c 的最大公因数，并令 $a=mu$，$c=mv$，则 $ub=vd$. 由于 $\gcd(u,v)=1$($\gcd(u,v)$ 指 u 和 v 的最大公因数)，u 必定整除 d. 设 $d=nu$，则 $b=nv$，且

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m^2+n^2)(u^2+v^2).$$

【习题】 证明：$a^2+b^2+c^2+d^2\not\equiv 3 \pmod 4$.

问题 437 先对5张牌考虑同样的问题. 一次洗牌相当于对这5张牌进行一次置换，并且可用

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\end{pmatrix}$$

表示，意即牌 r 被牌 a_r 所替换. 例如，考虑由置换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

所表示的洗牌法. 在下表中，第0行给出了牌的最初顺序，第 i 行($1\leqslant i\leqslant 6$)给出了经 i 次洗牌后牌的顺序.

0	1	2	3	4	5
1	2	1	4	5	3
2	1	2	5	3	4
3	2	1	3	4	5
4	1	2	4	5	3
5	2	1	5	3	4
6	1	2	3	4	5

在这一情形中，我们洗了6次牌才将它们回复到最初状态. 每一种置换都可分解为一些循环的乘积. 对上述置换我们有

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}=(1,2)(3,4,5),$$

其中的循环，比如(3，4，5)，表示 3→4，4→5，5→3. 由于这两个循环的周期分别是 2 和 3，则该置换的周期就是 2×3，即 2 与 3 的最小公倍数.

对于原问题，我们要将 13 划分成一些正整数的和，使这些正整数的最小公倍数最大. 稍经尝试，可知

$$13=5+4+3+1$$

给出了最大周期 5×4×3=60.

对 52 张牌，最大的周期是 180180，可由

$$52=13+11+9+7+5+4+2+1$$

得到.

作为一个研究型问题，希望读者能找出一个算法，以确定 n 张牌的循环周期.

问题 438 我们必须证明

$$P_1=0 \Rightarrow P_2=0, \qquad (1)$$

其中

$$P_n \equiv \frac{a}{(bc-a^2)^n}+\frac{b}{(ca-b^2)^n}+\frac{c}{(ab-c^2)^n}, \qquad n=1,2.$$

如果令

$$P_0 \equiv \frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2},$$

则两式相乘(并化简)得 $P_0 \cdot P_1=P_2$，由此即得(1)式，同时也有

$$P_0=0 \Rightarrow P_2=0. \qquad (2)$$

注意到因为

$$P_2=0 \Rightarrow P_0=0 \quad 或 \quad P_1=0, \qquad (3)$$

所以(1)式或(2)式的逆是不正确的. 此外，因为(3)式右边的任一式都不能导出另一式，所以(3)式中的无关联性是不可避免的. 例如，如果 ω 是 1 的虚立方根，则 $(a, b, c)=(0, \omega, -1)$ 是 $P_0=0$ 的一个解，但却不是 $P_1=0$ 的解；而对于 $(a, b, c)=(0, 1, -1)$，其逆却是对的.

问题 439 我们可以看到，(2)的证明中蕴涵着(1). 尽管如此，我们仍在此给出(1)的一个直接证明.

(1) 设 $p=a+a'$，$q=b+b'$，$r=c+c'$，并假定四面体的棱的标号符合 $p \geqslant q \geqslant r$. 则(见图 228) $b+c>a'$，$b'+c'>a'$，$b+c'>a$，$b'+c>a$.

将这些不等式相加得 $q+r>p$. 因此存在以 p、q、r 为边长的 $\triangle PQR$.

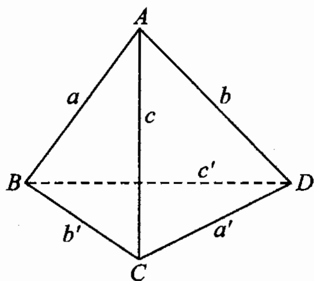


图 228

(2) 由涉及最大角 P 的余弦定理，

$$p^2=q^2+r^2-2qr\cos P,$$

可知当且仅当 $\cos P>0$ 或

$$q^2+r^2>p^2 \qquad (1)$$

时，$\triangle PQR$ 是锐角三角形.

我们将证明不等式

$$b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

和

$$2bb'+2cc'-2aa'>0, \qquad (3)$$

将两式相加即得(1)式.

为了证明(2)式，令 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$ 表示从某个初始点 O 到四面体顶点的向量(见图 228). 使用两个向量的点积的通常记号，$\vec{v}^2=\vec{v} \cdot \vec{v}=|\vec{v}|^2 \geqslant 0$，以及点积的其他一些性质，(2)式的左边就成为

$$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})^2+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})^2+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})^2-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})^2$$
$$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})^2 \geqslant 0.$$

为了证明(3)式，假定图中四面体的框架沿 CD 装上了转轴，并展开变平成为一个

凸四边形 $ADBC$. 在这过程中，除 AB 的长度增加外，其余棱的长度都不变. 对该四边形，由托勒密不等式得(从数量上说)

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AC}\cdot\overline{BD}\geqslant\overline{AB}\cdot\overline{CD},\quad(4)$$

当且仅当 $ADBC$ 是圆的内接四边形时等号成立(托勒密定理). 因此对于四面体而言，由于 AB 更短，(4)式成为一个更强的严格不等式，从而(3)式成立.

问题 440 注意到，当 $x<1$ 时，

$$16-24x+9x^2=(4-3x)^2>x^3,$$

(画出草图!)所以表达式是有意义的. 令 m 表示第一个根式，n 表示第二个根式，s 表示它们的和. 则

$$s^3=(m+n)^3=m^3+n^3+3mns.$$

于是

$$s^3=8-6x+3sx,$$

或

$$(s-2)(s^2+2s+4-3x)=0.$$

当 $x<1$ 时，第二个因式仅有虚根，所以 s 为常数，且等于 2. 当 $x=1$ 时，该结论也成立.

问题 441 将 u_n 写作 $u_n=2n-t_n$，则数列 $\{t_n\}$ 为

1; 2, 2; 3, 3, 3; 4, 4, 4, 4; 5, 5, ….

对每一个 t_n，我们有

$$1+2+3+\cdots+(t_n-1)$$
$$\leqslant n-1<1+2+3+\cdots+t_n,$$

且当 n 恰好使 t_n 取到某特定值的第一个时，左边的等号成立. 由左边的不等式得 $t_n^2-t_n-2(n-1)\leqslant0$，据此得 $t_n\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})$. 因为 t_n 是满足此不等式的最大整数，所以结论成立.

问题 442 易知 $F=\frac{1}{2}ef\sin\theta$(见图 229). 则 $e^2+f^2\geqslant2ef\geqslant2ef\sin\theta$.

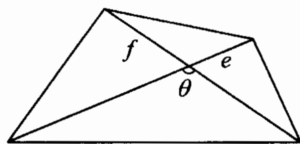


图 229

当且仅当 $e=f$ 且 $\theta=90°$时，等式成立. 对于非凸的四边形(见图 230)，由于我们仍然有 $F=\frac{1}{2}ef\sin\theta$，所以结论也成立.

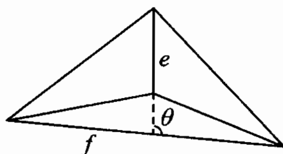


图 230

问题 443 将这个立方体分为 $13^3=2197$ 个边长是$\frac{15}{13}$单位长度的小立方体. 每一个小立方体的体对角线长度为$\frac{15\sqrt{3}}{13}$单位长度. 而

$$\left(\frac{15\sqrt{3}}{13}\right)^2=\frac{675}{169}<4,\text{或}\frac{15\sqrt{3}}{13}<2.$$

因此，每一个小立方体都可包含于一个半径是单位长度的球内. 因为有 11000 个点和 2197 个小立方体，并且 $5\times2197=10985<11000$，所以必有一个小立方体包含至少 6 个点(鸽笼原理). 因此存在一个单位球至少包含 6 个点.

问题 444 考虑一个 $6\times6\times6$ 的立方体，每一条在 $4\times4\times4$ 的中间立方体内的获胜线都与外壳交于两个不同的 $1\times1\times1$ 的立方体，而每一个这种 $1\times1\times1$ 的立方体都恰是一条获胜线的延续. 因此，不同的获胜方式数等于外部 $1\times1\times1$ 的立方体的个数的$\frac{1}{2}$，即

$$\frac{1}{2}(6^3-4^3)=76.$$

如果是在边长为 k 的 n 维方体上玩这个游戏，则相应的种数为

$$\frac{1}{2}[(k+2)^n-k^n].$$

问题 445 该问题隐含了一个“诡计”. 只要稍经思考，或使用一点点代数知识就能揭示，在上面 26 张牌中的红牌数总是等于下面 26 张牌中的黑牌数. 因此，从逻辑上讲，无论“则”后面的话是什么，该论断永远是正确的.

问题 446 虽然图 231 的面积 A 可从所给的图形中直接用 x 和 y 表示出，但最方便的做法是注意到这样的四块木板可如图拼成一个中空的正方形或正方形框架.（事实上，木工正是如此使用这几块木板的.）

于是

$$A=\frac{y^2-x^2}{4}=\left(\frac{y+x}{2}\right)\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

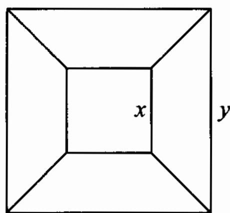


图 231

如果令

$$m=\frac{y+x}{2},\quad n=\frac{y-x}{2},$$

则

$$m+n=y,\quad m-n=x,\quad A=mn.$$

由此及题中的条件，A 必定至少有四种方式可分解为两个因子的乘积. 容易发现，在 40 以下的数中，30 是唯一有此性质的数. 而

$$30=1\times30=2\times15=3\times10=5\times6,$$

于是可求得相应的 x 和 y 的值为

$$(31,29),(17,13),(13,7),(11,1).$$

问题 447 $m=1$ 或 $n=1$ 的情形显然成立. 令 $\sqrt[n]{m}=1+u$，$\sqrt[m]{n}=1+v$，其中 u、$v>0$，则由二项展开式得 $m=(1+u)^n>1+nu$，$n=(1+v)^m>1+mv$，于是

$$u<\frac{m-1}{n},\quad v<\frac{n-1}{m}.$$

则

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}$$
$$>\frac{n}{n+m-1}+\frac{m}{n+m-1}$$
$$=\frac{n+m}{n+m-1}>1.$$

【评论】 更一般地，当 x、$y>0$ 时，有 $x^y+y^x>1$. 一个简短的微积分证明见于 *Mathematics Magazine* 52 (1979)：118. 你能给出一个不用微积分的证明吗？

问题 448 （1）结论是不成立的. 显然有 $2N=105263157894736842 0$. 从而

$$19N=20N-N=9999999999999999990,$$

并不包含所有十个数字.

（2）不存在恒数！我们采用间接证法. 假定 N 是一个恒数. 我们可以将 N 表示为 2^a5^bM 的形式，其中 M 与 2 和 5 都互素. 因为

$$2^b5^aN=10^{a+b}M$$

也是一个恒数，所以所有 M 的倍数一定都包含那 9 个非零数字. 现在引用由欧拉所推广的费马定理：如果 a 与 n 互素，则

$$a^{\varphi(n)}-1=kn,$$

其中 $\varphi(n)$（欧拉 φ 函数）是不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数. 于是我们有

$$10^{\varphi(M)}-1=kM. \qquad (*)$$

这导致矛盾，因为 kM 应当包含所有 9 个非零数字，而（*）式的左边却只包含 9.

为了给出另一更为初等的证明，再次假定 N 是一个恒数，并考虑下面 N 个数被 N 所除的余数：

$$1,\ 11,\ 111,\ \cdots,\ 111\cdots1,$$

其中最后一个数共有 N 位. 因为最多有 $N-1$ 个不同的非零余数，所以或者上述数中有一个数能被 N 整除，从而 N 不是恒数；或者其中有两个数，设为

$$R=\underbrace{111\cdots 1}_{r个1},\ S=\underbrace{111\cdots 1}_{s个1},\ s>r,$$

有相同的余数，在这种情形下，这两数的差

$$S-R=\underbrace{11\cdots 1}_{s-r个1}\underbrace{00\cdots 0}_{r个0}$$

能被 N 整除，从而 N 也不是恒数.

问题 449 结论可由恒等式

$$(a^2+b^2-2)^2+(c^2+d^2-2)^2+2(ac-bd)^2$$
$$=(a^2+c^2-2)^2+(b^2+d^2-2)^2+2(ab-cd)^2$$

立即得出. 这一结论可以推广. 它可以等价地表述为：如果一个 $n\times n$ 矩阵的行向量是标准正交的，则它的列向量也是标准正交的.

问题 450 设 S、S_1 和 S_2 分别表示 $1, 2, \cdots, n$ 的无限制条件的、$a_1=1$ 的和 $a_2=2$ 的排列的集合. 则(以 $|X|$ 表示集合 X 的元素的个数)

$$|S|=n!,$$
$$|S_1|=|S_2|=(n-1)!,$$
$$|S_1\cap S_2|=(n-2)!.$$

因此

$$|S_1\cup S_2|=|S_1|+|S_2|-|S_1\cap S_2|$$
$$=2(n-1)!-(n-2)!.$$

于是满足 $a_1\neq 1$ 且/或 $a_2\neq 2$ 的排列的个数是

$$n!-2(n-1)!+(n-2)!$$
$$=(n-2)!(n^2-3n+3).$$

问题 451 设这一年这人的年龄为 n，他孙子的年龄为 k. 则对 $i=0, 1, 2, 3, 4, 5$，有 $k+i$ 整除 $n+i$. 从而 $k+i$ 整除 $n-k$，所以 $n-k$ 是 $k, k+1, \cdots, k+5$ 的最小公倍数的倍数. 如果 $k=1$，则 $n-1$ 是 $\text{lcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6)=60$ 的倍数. 因此这人 61 岁，他的孙子 1 岁. 任何其他的 k 都将导致不现实的解. 比如当 $k=2$ 时，$n-2$ 是 $\text{lcm}(2, 3, 4, 5, 6, 7)=420$ 的倍数.

【译者注】 $\text{lcm}\,(m, n)$表示 m，n 的最小公倍数.

问题 452 假定 $\log_{10}2=\frac{a}{b}$，其中 a、b 是正整数. 则 $10^{\frac{a}{b}}=2$，所以 $10^a=2^b$. 因为左边能被 5 整除，而右边却不能，矛盾. 类似地可知，对任一整数 m，除非 m 是 10 的方幂，否则 $\log_{10}m$ 就是无理数.

问题 453 如图 232，每 4 个点都是一个四边形的顶点，而四边形至少包含一个不小于 90°的角. 因此，由 4 个点所形成的 4 个三角形中，至少有一个是钝角或直角三角形.

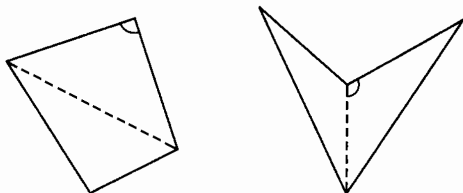


图 232

考虑任意 5 个点. 这其中每 4 个点都至少给出一个钝角或直角三角形. 由于有 5 种选 4 个点的选法，所以至少有 5 个钝角或直角三角形. 但每一个三角形都计算了两次，所以我们只能保证这些三角形中至少有 3 个是不同的. 因此，在由 5 个点所形成的 $C_5^3=10$ 个可能的三角形中，至少有 3 个是钝角或直角三角形. 现在，考虑从 75 个点中选 5 个点的所有 C_{75}^5 种可能的选择. 对每一个选择，记录所有得到的三角形，则至少有 30%的三角形是钝角或直角三角形. 在记录的所有由

一切可能的选择所得到的三角形中，每一个三角形恰好出现 C_{72}^{2} 次，且其中至少有 30% 是钝角或直角三角形. 因此，在所有的三角形中，如不计重复，至少有 30%是钝角或直角三角形.

（有 100 个点的同样问题，见于第 12 届国际奥林匹克数学竞赛.）

问题 454 设 T_1 和 T_2 的内角分别是 A_1、B_1、C_1 和 A_2、B_2、C_2. 由于 $A_1+B_1+C_1=180°=A_2+B_2+C_2$，一个三角形的每一个内角不可能都大于另一个三角形的对应角. 所以，通过必要时适当改变下标的标号，可设

$$A_1 \geqslant A_2 \quad 及 \quad B_1 \leqslant B_2,$$

则

$$\Delta_1=\frac{1}{2}b_1c_1 \sin A_1 \geqslant \frac{1}{2}b_2c_2 \sin A_2=\Delta_2$$

（由于 A_1 和 A_2 都是锐角），而且（由工具箱 E45）

$$R_1=\frac{b_1}{2 \sin B_1} \geqslant \frac{b_2}{2 \sin B_2}=R_2.$$

三角形的内径公式是 $r=\frac{\Delta}{s}$，其中 s 是三角形的半周长（参见工具箱 E45）. 最容易计算面积的情形是直角三角形和等腰三角形. 因此，我们让 T_1 成为一个直角三角形，T_2 是一边较短的等腰三角形，以使 $r_1<r_2$. 取 $(a_1, b_1, c_1)=(3, 4, 5)$ 及 $(a_2, b_2, c_2)=(3, 4, 4)$，则 $\Delta_1=6$，$s_1=6$，$r_1=1$，而

$$\Delta_2=\frac{3\sqrt{55}}{4}, \quad s_2=\frac{11}{2}, \quad r_2=\sqrt{\frac{45}{44}}>1.$$

【注】 如果仅 T_1 是锐角三角形，仍然有 $\Delta_1 \geqslant \Delta_2$.

问题 455 设 a 和 b 分别是包含点 A 和 B 的两条给定的异面直线. 如果 C 是球心，则 $a \perp AC$，$b \perp BC$，且 C 与 A 和 B 等距. 因此 C 在下列三个平面上：

α：过 A 且垂直于 a；

β：过 B 且垂直于 b；

γ：垂直平分联结 A 和 B 的线段 s.

由于 a 和 b 异面，α 和 β 既不平行也不重合，因此相交于一条直线 m. 假设存在 γ 平行于或包含 m 的可能性，则 m 垂直于 s，同时也垂直于 a 和 b，所以 m 垂直于由 a 和 s 所确定的（过 A 的）平面及由 b 和 s 所确定的（过 B 的）平面. 因为这两个平面都包含 s，所以它们重合，因此 a 和 b 共面，这与题设矛盾. 因此 γ 与 m 恰好相交于一个点，而这一点正是所求球面的中心.

问题 456 除 2 和 3 外，每一个素数都形如 $6u+1$ 或 $6u-1$. 如果素数 $p=6u+1$ 在一个链中，由于 $2p+1$ 可被 3 整除，则它的后继，如果有的话，必形如 $2p-1=12u+1=2(6u)+1$. 所以这链中的后继元素（要求出现的都是素数）必是

$$\{6u+1, 2(6u)+1, 2^2(6u)+1, \cdots, 2^i(6u)+1, \cdots\}.$$

这个序列不可能永远给出素数. 由工具箱B8 知，存在数 k，使

$$2^k \equiv 1 \pmod{6u+1}.$$

对这个 k，有

$$2^k(6u)+1 \equiv 6u+1 \equiv 0 \pmod{6u+1},$$

所以 $2^k(6u)+1$ 是一个合数.

对链中形如 $p=6u-1$ 的素数也可进行类似的讨论.

【习题】 这样的素数链存在一个最大的长度吗？

问题 457 如图 233，设 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$$r=4R \sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2},$$

$$t=4R \cos \frac{\angle A}{2} \cos \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2},$$

于是

$$\frac{r}{t}=\tan \frac{\angle A}{2} \tan \frac{\angle B}{2}.$$

同样有

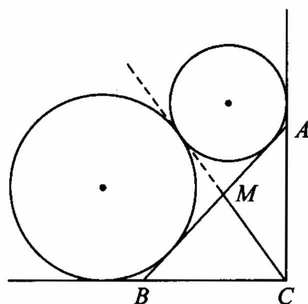


图 233

$$r_1 = 4R_1 \sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle AMC}{2}\sin\frac{\angle ACM}{2},$$

$$t_1 = 4R_1 \cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle AMC}{2}\cos\frac{\angle ACM}{2},$$

$$r_2 = 4R_2 \sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle BMC}{2}\sin\frac{\angle BCM}{2},$$

$$t_2 = 4R_2 \cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle BMC}{2}\cos\frac{\angle BCM}{2}.$$

由于

$$\sin\frac{\angle AMC}{2}=\cos\frac{\angle BMC}{2},$$

及

$$\cos\frac{\angle AMC}{2}=\sin\frac{\angle BMC}{2}$$

$\left(因为\frac{\angle AMC}{2}+\frac{\angle BMC}{2}=90^\circ\right)$，即可得结论.

问题 458 由于任何环中的最大(最小)数不大于(不小于)前一个环的最大(最小)数，则环中的最大数与最小数的差的绝对值将随这过程的不断重复而递减(或保持不变). 最后，任何这样一个由非负整数所构成的序列必定会出现两个相同的相邻元素. 不失一般性，我们可假定环 R 在这一阶段的最小元素为 0. 如果 a 是最大元素，则 R 有三种可能：

(i) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$；

(ii) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$；

(iii) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$.

对每一种可能施行相应变换过程，我们有：

(i)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} a-b & |a-2b| \\ a & a-b \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} c & c \\ b & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & |c-b| \\ |c-b| & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} |c-b| & |c-b| \\ |c-b| & |c-b| \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c=\big|a-b-|a-2b|\big|$.

(ii)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} a & b \\ b & |a-2b| \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a-b & c \\ a-b & c \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c=\big|b-|a-2b|\big|$，$d=|a-b-c|$.

(iii)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a-b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} |a-2b| & |a-2b| \\ |a-2b| & |a-2b| \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以证明，如果以任意 $n(\geqslant 3)$ 个数代替这 4 个数开始一个相似的过程，则当 $n=2^m$ 时，这个过程总是以所有的数变为零而告终.（参见 *SIAM Review* 12 (1970)：297－300 问题 69 - 1.）此外，Lotan (*Amer. Math. Monthly* 56 (1949)：535－541) 证明了，如果 4 个实数的首次差集不是 1、q、q^2、q^3 的形式，其中 q 是 $q^3=q^2+q+1$ 的正根，则从这 4 个实数起，除了平凡的变换，最后

总得到全为零的集.

问题 459 正五边形的仅有的内切椭圆就是其内切圆. 如果存在另一个内切椭圆，它将与内切圆至少交于 5 个点. 但这是不可能的. 因为两个不同的椭圆之间的最大交点数是 4. 要证明这一点，可以从表示两个椭圆的二次方程中消去 y^2，再解出 y. 然后回代，可得到一个关于 x 的四次方程.

更一般地，对一个 n 维欧几里得空间，如果 p 个次数分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_p$ 的代数曲面仅有有限个公共点，则公共点至多有 $d_1d_2d_3\cdots d_p$ 个. 这就是比左定理.

问题 460 当 x、y、$z\leqslant 0$ 时，不等式成立. 所以不失一般性，此后假定 $z>0$. 通过考虑退化的三角形边长(1, 0, 1)和(0, 1, 1)，可知 $x<0$ 及 $y<0$. 令 $x=-u$，$y=-v$，$z=w$，其中数 u、v、w 均为正数. 则条件转化为对一切边长为(a, b, c)的三角形，

$$wc^2\leqslant ua^2+vb^2. \qquad (1)$$

假定(1)式成立. 那么这对于退化的情形 $c=a+b$ 也成立，所以

$$(u-w)a^2-2wab+(v-w)b^2\geqslant 0. \qquad (2)$$

而这对于任何正的比值$\frac{a}{b}$也成立，所以 $u\geqslant w$ 且 $v\geqslant w$. 由于 $w\geqslant 0$，可知(2)式对于非正的比值$\frac{a}{b}$也成立，所以(2)式对一切数对(a, b)都成立. 因此(2)式左边的判别式是负的，即 $w^2\leqslant(u-w)(v-w)$或

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\leqslant\frac{1}{w}. \qquad (3)$$

另一方面，设(3)式成立. 则 $u\geqslant w$，$v\geqslant w$，且(2)式左边的判别式是负的. 如果(a, b, c)是任何一个三角形的边长，则

$$\begin{aligned}&ua^2+vb^2-wc^2\\ \geqslant\ &ua^2+vb^2-w(a+b)^2\\ =\ &(u-w)a^2-2wab+(v-w)b^2\\ \geqslant\ &0.\end{aligned}$$

这个问题的解是所有使下列四组条件之一成立的(x, y, z)的集合：

(i) $x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$，$z\leqslant 0$；

(ii) $x<0$，$y<0$，$z>0$，$-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{z}$；

(iii) $x<0$，$y>0$，$z<0$，$-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{y}$；

(iv) $x>0$，$y<0$，$z<0$，$-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{x}$.

问题 461 令$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{v}{u}$，其中 $u+v=1$，则有$\overline{OA'}=u\,\overline{OB}+v\,\overline{OC}$，且塞瓦线长 c_a 的平方由下式给出：

$$\begin{aligned}c_a^2&=(\overline{OA'}-\overline{OA})\cdot(\overline{OA'}-\overline{OA})\\&=[u(\overline{OB}-\overline{OA})+v(\overline{OC}-\overline{OA})]^2\\&=u^2(\overline{OB}-\overline{OA})^2+v^2(\overline{OC}-\overline{OA})^2+\\&\quad uv[2(\overline{OB}-\overline{OA})\cdot(\overline{OC}-\overline{OA})]\\&=u^2c^2+v^2b^2+uv(b^2+c^2-a^2). \qquad (1)\end{aligned}$$

(顺便提一下，这就是斯图尔特定理.)

通过循环交换 a、b、c，可得另两条塞瓦线：

$$c_b^2=u^2a^2+v^2c^2+uv(c^2+a^2-b^2), \qquad (2)$$

$$c_c^2=u^2b^2+v^2a^2+uv(a^2+b^2-c^2). \qquad (3)$$

现在我们证明当且仅当 $a=b=c$ 时 $c_a=c_b=c_c$. 显然，如果 $a=b=c$，则(由(1)(2)(3)式得)$c_a=c_b=c_c$. 为了证明 $c_a=c_b=c_c$ 蕴

1952 年，有人问泰勒(E. Teller，原子弹之父)："热核装置能成功吗?"他答道："我不知道。""但你五年前也会说不知道，那么你自那时以来难道什么进展也没有吗?""啊，对，"泰勒答道，"我现在的不知道有着更好的理由。"

涵 $a=b=c$，我们必须证明关于 a、b、c 的线性方程组(1) (2) (3)有唯一解. 改写这个方程组，得

$$-uva^2+vb^2+uc^2=c_a^2,$$
$$ua^2-uvb^2+vc^2=c_b^2=c_a^2,$$
$$va^2+ub^2-uvc^2=c_c^2=c_a^2.$$

等价地，我们必须证明系数行列式

$$D=\det\begin{vmatrix}-uv & v & u\\ u & -uv & v\\ v & u & -uv\end{vmatrix}$$

不等于零(非奇异). 展开这个行列式，得

$$\begin{aligned}D&=u^3+v^3+3u^2v^2-u^3v^3\\&=u^2-uv+v^2+3u^2v^2-u^3v^3\\&=1-3uv+3u^2v^2-u^3v^3=(1-uv)^3.\end{aligned}$$

而对于实数 u，$1-uv=1-u(1-u)$不可能是零.

问题 462 我们有

$$\begin{aligned}&\sin A_1\sin A_2\cdots\sin A_n\\&=\cos A_1\cos A_2\cdots\cos A_n\\&=(2^{-n}\sin 2A_1\sin 2A_2\cdots\sin 2A_n)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant 2^{-\frac{n}{2}},\end{aligned}$$

当且仅当

$$\sin 2A_1=\sin 2A_2=\cdots=\sin 2A_n=1$$

时等号成立.

这种情形在每个 A_i 都等于$\frac{\pi}{4}$时出现，而这时条件是满足的.

问题 463 设 $0\leqslant\theta<\pi$. 二次型

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2xy\cos\theta\\&=(x-y\cos\theta)^2+y^2\sin^2\theta\qquad(*)\end{aligned}$$

总是非负的，并且仅当 $\theta\neq0$，$x=y=0$ 或 $\theta=0$，$x=y$ 时为零. 现在令 $x=b_1c_2$，$y=b_2c_1$，$\theta=A_1-A_2$，其中 A_i 为与边 a_i 相对的角. 则对 $i=1$、2，

$$2b_ic_i\cos A_i=b_i^2+c_i^2-a_i^2,$$
$$b_ic_i\sin A_i=2\Delta_i.$$

从而由(*)式得

$$b_1^2c_2^2+b_2^2c_1^2-\frac{1}{2}(b_1^2+c_1^2-a_1^2)\cdot(b_2^2+c_2^2-a_2^2)-8\Delta_1\Delta_2\geqslant0,$$

这等价于所要证明的不等式. 为使等号成立，我们应有$\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$和 $A_1=A_2$. 因此这两个三角形必须相似. 要了解其他的证明和讨论，参见：D. Pedoe，Thinking geometrically，*Amer. Math. Monthly* 77 (1970)：711－721；O. Bottema，M. S. Klamkin，Joint triangle inequalities，*Simon Steven* 48 (1974/5)：3－8.

问题 464 不失一般性，可假定 $A_1B_1\geqslant A_2B_2$，这意味着 $B_1A_2\leqslant B_2A_3$. 因为 $B_1B_2=B_2B_3$，所以 $A_2B_2\geqslant A_3B_3$，于是又得 $B_2A_3\leqslant B_3A_4$.（注意到$\angle A_2=\angle A_3$）继续这一过程，最后得

$$A_1B_1\geqslant A_2B_2\geqslant\cdots\geqslant A_nB_n\geqslant A_1B_1.$$

从而得 A_iB_i＝常数.

问题 465 由于 0 显然是一个好数，因此最大的好数$\geqslant0$. 进一步知，如果 x 是好数，则(1)式对 $a=m$ 和 $b=0$ 也成立，这显示 $x\leqslant\frac{n}{m}\leqslant1$. 从而我们可将注意力限制在区间[0，1]上来考察好数. 对这个区间上的任一个数 x，存在唯一的角 θ $\left(\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，使 $\cos\theta=\frac{x}{2}$. 因此，如果对一切 $0\leqslant a\leqslant m$，$0\leqslant b\leqslant n$，有

$$\begin{aligned}&m^2+n^2-2mn\cos\theta\\&\geqslant a^2+b^2-2ab\cos\theta,\end{aligned}\qquad(2)$$

则 $x=2\cos\theta$ 是好数. 这提示我们要考虑(2)式的下列几何表述，见图 234.

设 PQR 是一个三角形，$\overline{PQ}=m$，$\overline{PR}=n$，$\angle QPR=\theta$. 设 S 在 PQ 上，$\overline{PS}=a$，T 在 PR 上，$\overline{PT}=b$(a、b 任意取值). 由三角形

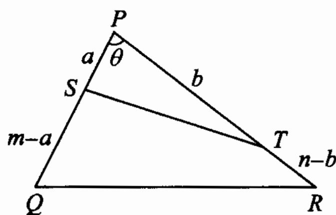


图 234

的余弦定理，(2)式等价于对所有 PQ 上的 S 及 PR 上的 T，

$$\overline{QR}^2 \geqslant \overline{ST}^2. \tag{3}$$

这又等价于 $\overline{QR}^2 \geqslant \overline{PQ}^2$（因为当且仅当 QR 是 $\triangle PQR$ 的最长边时(3)式成立）. 于是当且仅当

$$m^2+n^2-mnx=m^2+n^2-2mn\cos\theta \geqslant m^2,$$

即 $0 \leqslant x \leqslant \frac{n}{m}$ 时，x 是好数. 从而最大的好数是 $\frac{n}{m}$.

问题 466 考虑任何一个边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 的 $n+1$ 边形. 则由幂均值不等式，当 $m \geqslant 1$ 时，

$$\left(\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立. 又由三角不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant a_{n+1},$$

得

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m \geqslant \frac{a_{n+1}^m}{n^{m-1}},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}a_{n+1}$ 时等号成立，即该多边形是退化的. 题中所要的结果相应于 $m=4$、$n=3$ 时的特殊情形.（参见问题 275.）

问题 467 首先注意到，由算术-几何平均值不等式，我们有

$$x+y=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}},$$

当且仅当 $x=2y$ 时等号成立. 同时又有

$$\begin{aligned}&2x^2+2xy+3y^2\\&=\frac{2x^2}{8}+\cdots+\frac{2x^2}{8}+\frac{2xy}{4}+\cdots+\\&\quad\frac{2xy}{4}+y^2+y^2+y^2\\&\geqslant 15\left[\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8\left(\frac{2xy}{4}\right)^4(y^2)^3\right]^{\frac{1}{15}}\\&=15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2x^2}{8}=\frac{2xy}{4}=y^2$ 或 $x=2y$ 时等号成立. 于是

$$\begin{aligned}k&=x+y+(2x^2+2xy+y^2)^{\frac{1}{2}}\\&\geqslant(3+\sqrt{15})\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}},\end{aligned}$$

从而

$$\max(x^2y)=\frac{4k^3}{(3+\sqrt{15})^3}.$$

问题 468 我们用数学归纳法证明. 假设当 $m=n$ 时(*)式的左边成立，则

最近出版了一本彩图百科全书，它的广告词里说："24 000 幅插图，分类专业，查阅方便。它是世界上这类图书中最大型的，而且是绝无仅有的。"

$$C_{2n+2}^{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+1}C_{2n}^{n}$$
$$>\frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}}$$
$$=\frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\ \sqrt{n+1}}$$
$$>\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

于是(*)式的左边对 $m=n+1$ 也成立. 由于它对 $m=2$ 成立，所以它对一切 m 都成立. 类似地可对(*)式的右边加以证明.

问题 469 设(x, y)是一个解. 如果 $x=0$，则得 $y=0$ 或 1，于是解为(0, 0)，(0, 1). 如果 $x\neq 0$，则存在唯一的有理数 $m\neq -1$ 使 $y=mx$，代入解得

$$x=\frac{1+m^2}{1+m^3},\quad y=\frac{m(1+m^2)}{1+m^3}.\quad (*)$$

反之，容易证明，对任意的有理数 $m\neq -1$，(*)式都确定一个解.

问题 470 对 $0\leqslant k\leqslant n$，随机投掷 n 粒均匀骰子，有 k 个六点朝上的概率是

$$C_n^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^k,$$

因此，如令 $a=\frac{5}{6}$ 及 $b=\frac{1}{6}$，则所求概率

$$P=C_n^1a^{n-1}b+C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5+\cdots$$
$=(a+b)^n$ 的展开式中偶数项的和
$$=\frac{1}{2}[(a+b)^n-(a-b)^n]$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

问题 471 设 M 为妈妈的年龄，P 为爸爸的年龄，B 为兄弟的年龄，I 为我的年龄. 则

$$M+P+B+I=83,\quad 6P=7M,\quad M=3I.$$

因此

$$\frac{5}{2}M+B=83.$$

由于 P 和 M 为整数，M 必是 6 的倍数. 满足此条件，并使 B 为正整数且小于 M 的 M 的值只有 $M=30$(从而 $B=8$)或 $M=24$(从而 $B=23$). 这第二个解将使妈妈仅比我兄弟大一岁，所以要舍去. 因此 $M=30$，$B=8$，$P=35$，$I=10$.（对于才 10 岁的“我”，能够设计出这样的问题，肯定要为自己的聪明而兴奋不已!）

问题 472 设

$$a=\prod p_i^{a_i},\ b=\prod p_i^{b_i},\ c=\prod p_i^{c_i},$$

其中 p_i 为 a、b、c 的素因子(某些幂次可能为零). 由于

$$(a, b)=\prod p_i^{\min(a_i, b_i)},$$
$$[a, b]=\prod p_i^{\max(a_i, b_i)},$$

等等，我们必须证明：

$$2\max(a_i, b_i, c_i)-\max(b_i, c_i)-\max(c_i, a_i)-\max(a_i, b_i)$$
$$=2\min(a_i, b_i, c_i)-\min(b_i, c_i)-\min(c_i, a_i)-\min(a_i, b_i).$$

不失一般性，对每一个特殊的 i，可设 $a_i\geqslant b_i\geqslant c_i$，从而得

$$2a_i-b_i-a_i-a_i=2c_i-c_i-c_i-b_i.$$

使用 max 和 min，容易对此进行推广.

问题 473 设 $n=(abc)$，N 是所求的乘积. 显然，a、b、c 中没有一个是 5. 进一步有 $c\neq 1$. 否则，$(cba)<200$，于是 $N<200\times 10^3\times 10^3=2\times 10^8$，这是不对的. 我们还可使用两条准则：

(a) $a\times b\times c$ 末尾数为 6；

(b) 因为任一数对模 3 总同余于它的各位数字的和，所以 $N\equiv 35\equiv 2 \pmod 3$，因此 $n\equiv a+b+c\equiv 2 \pmod 3$.

由准则(a)，得 n 的可能值是 876，964，843，763，983，632，742，862，972.

再由准则(b)，除 983 和 632 外，其余都被排除了. 最后得 $n=983$ 及 $N=328$、245、326.

问题 474 通过令

$$x+y=\sqrt{2}X,$$
$$y-x=\sqrt{2}Y,$$

将坐标系旋转 45°(见图 235)，则方程变为

$$(5X+Y)^2Y=2X.$$

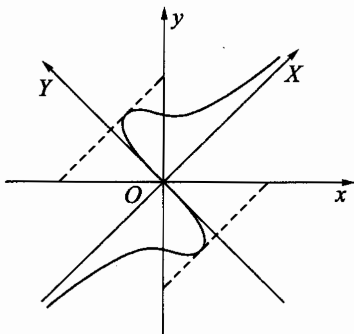


图 235

如果将 X、Y 换为 $-X$、$-Y$，则方程不变. 又，X、Y 必须同号，且(解 X 的二次方程得)$Y^2\leqslant\frac{1}{10}$.

$Y=0$ 是仅有的实渐近线，$X=0$ 是原点处的一条拐切线.

问题 475 我们有

$$\frac{1}{A_{n+1}}-\frac{1}{A_n}=n.$$

于是

$$\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_0}=0,$$
$$\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_1}=1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{A_{1990}}-\frac{1}{A_{1989}}=1989.$$

将上面各式相加得

$$\frac{1}{A_{1990}}-\frac{1}{A}=1+2+\cdots+1989$$
$$=995\times1989.$$

所以

$$A_{1990}=\frac{A}{1+995\times1989A}.$$

问题 476 我们采用间接证法. 假定可得到所有的正剩余 1，2，…，100. 以 a_1b_1，a_2b_2，…，$a_{100}b_{100}$ 表示各对乘积，并设 $a_ib_i\equiv c_i$ (mod 101). 则由威尔逊定理，

$$\prod c_i=100!\ \equiv-1\ (\text{mod } 101).$$

而

$$\prod c_i\equiv\prod a_ib_i$$
$$\equiv(100!)^2\equiv1\ (\text{mod } 101),$$

矛盾.

问题 477 令 $x=y=a$，这里 a 是任取的. 则 $f(0)=ba^2$. 因为 $f(0)$是一个确定的值，而 a 任取，所以 $b=0$. 满足这一条件的函数确实存在，比如 $f(x)=mx$ 就满足 $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

问题 478 由于任何一个有四条以上边的多边形总可以分割成三角形，因此问题转化为如何将一个钝角三角形分割成锐角三角形. 如图 236，$\angle BAC$ 是钝角，且 X 是三角形的内心. 标记为 α、β、γ、δ、ε 的角显然都是锐角，且 α、β、γ 每一个都大于 45°. 由此推出，X 处的每一个角都是锐角.

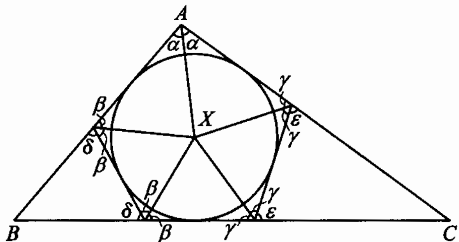


图 236

【译者注】 对直角三角形的分割与此类似.

问题 479 该逆命题是不成立的. 我们将证明，只要一个四面体是等腰的(即对棱两两

相等)，而不必要求是正则的，则 O、I 与 G 重合. 设 $ABCD$ 是以 G 为重心的等腰四面体(见图 237)，并令

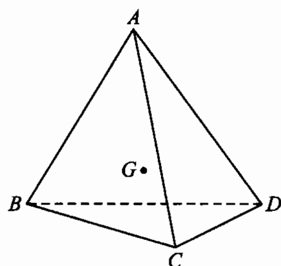


图 237

$$a=\overrightarrow{GA},\quad b=\overrightarrow{GB},\quad c=\overrightarrow{GC},\quad d=\overrightarrow{GD}.$$

因为四面体是等腰的，所以(利用记号 $\vec{V}^2=\vec{V}\cdot\vec{V}=|\vec{V}|^2$)

$$\begin{cases}(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{c}-\vec{d})^2,\\(\vec{a}-\vec{c})^2=(\vec{b}-\vec{d})^2,\\(\vec{a}-\vec{d})^2=(\vec{b}-\vec{c})^2.\end{cases}\qquad(1)$$

由于 G 是重心，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，因此

$$\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{c}+\vec{d})^2,\\(\vec{a}+\vec{c})^2=(\vec{b}+\vec{d})^2,\\(\vec{a}+\vec{d})^2=(\vec{b}+\vec{c})^2.\end{cases}\qquad(2)$$

展开平方项，并将(1)式与(2)式中的对应方程相加得

$$\begin{cases}\vec{a}^2+\vec{b}^2=\vec{c}^2+\vec{d}^2,\\\vec{a}^2+\vec{c}^2=\vec{b}^2+\vec{d}^2,\\\vec{a}^2+\vec{d}^2=\vec{b}^2+\vec{c}^2,\end{cases}$$

由此得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=\vec{d}^2$. 于是 $|\overrightarrow{GA}|=|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|=|\overrightarrow{GD}|$，从而 G 与外心 O 重合.

显然，一个等腰四面体的四个面是全等的，并且因此四条高也相等(考虑体积!). 由于 G 分每一条中线(由顶点到对面重心的线段)的比为 $3:1$，于是 G 到每一个面的距离是相应高的 $\frac{1}{4}$，从而 G 到每一个面的距离都相等，因此 G 与内心 I 重合.

问题 480 我们希望证明，对任一个具有题中所给性质的有限集 S，可找到另一个形如 2^r-3 的数，使它与 S 中的每一个整数都互素. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是所有能整除 S 中至少一个元素的素数全体. 令 $r=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)+1$. 考虑整数 2^r-3. 由费马定理，$2^{p_1-1}\equiv 1 \pmod{p_1}$，我们有

$$\begin{aligned}2^r-3&=2(2^{p_1-1})^{(p_2-1)\cdots(p_k-1)}-3\\&\equiv 2-3=-1 \pmod{p_1},\end{aligned}$$

所以 p_1 不整除 2^r-3. 类似地有 p_i 不整除 $2^r-3(i\geqslant 2)$. 即得结论.

问题 481 如图 238，易知(以 S 表示和)

$$4R^2S=\sum_{r=1}^{n-1}\csc^2\frac{r\pi}{n}.$$

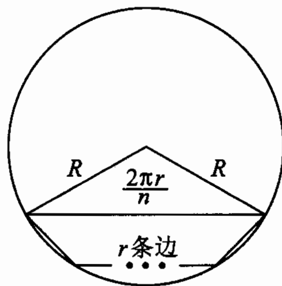


图 238

下面给出一个方法，此方法可用来计算 S，以及诸如 $\sum\sec^2\frac{r\pi}{n}$、$\sum\csc^4\frac{r\pi}{n}$ 等其他三角函数的和式. 我们从展开式

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-\cdots}{1-S_2+S_4-\cdots}$$

出发，其中 S_r 表示 $\tan\theta_1, \tan\theta_2, \cdots, \tan\theta_n$ 的每次取 r 个的乘积的和. 这可由数学归纳法证明. 现在令 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$，则

$$\tan n\theta=\frac{C_n^1x-C_n^3x^3+C_n^5x^5-\cdots}{1-C_n^2x^2+C_n^4x^4-\cdots},$$

其中 $x=\tan\theta$.

由于当 $\theta=\frac{r\pi}{n}$，$r=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，$\tan n\theta$ 为零，因此方程

$$C_n^1-C_n^3x^2+C_n^5x^4-\cdots=0$$

的根为 $\tan\frac{r\pi}{n}$，$r=1, 2, \cdots, n-1$. 从而

$$\sum_{r=1}^{n-1}\cot\frac{r\pi}{n}=0,$$

$$\sum_{r=1}^{n-1}\cot^2\frac{r\pi}{n}=0+2\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{1}{3}(n-1)(n-2).$$

最后得

$$\sum_{r=1}^{n-1}\csc^2\frac{r\pi}{n}=\sum_{r=1}^{n-1}\left(1+\cot^2\frac{r\pi}{n}\right)=\frac{1}{3}(n^2-1),$$

及

$$S=\frac{n^2-1}{12R^2}.$$

【习题】 求 $\sum\csc^4\frac{r\pi}{n}$.

问题 482 我们并不关心任何一行中的硬币的次序，这仅仅是一个对行的分布问题. 将 n^2 枚硬币分成 n 行，每行 n 枚硬币，共有 $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}$ 种不同的分法. 但如果每行中都有一枚银币，则分法有 $n!\ \frac{(n^2-n)!}{[(n-1)!]^n}$ 种. 因此每一行都有一枚银币的概率为

$$\frac{n^{n-1}(n-1)!\ (n^2-n)!}{(n^2-1)!},$$

所要求的概率即为这个概率的补.

问题 483 （解答由 E. P. Starke，*Math. Mag.* 23 (1949)给出）设给定的整数为

$$k=a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+\cdots+a_1b+a_0,$$

其中 b 是数系的基. 考虑 n 个整数

$$k_1=a_0,\ k_2=a_1b+a_0,\ \cdots,$$

$$k_{n-1}=a_{n-2}b^{n-2}+\cdots+a_1b+a_0,$$

$$k_n=k.$$

如果某个 k_j 能够被 n 整除，显然这问题就解决了，因为只要把 k 的前 $n-j$ 个数字改为零即可. 如果没有 k_j 能被 n 整除，则至少有两个 k_j 互相同余，设

$$k_i\equiv k_j \pmod n,\quad i<j,$$

则只要将 k 的前 $n-j$ 个和后 i 个数字改为零，问题就解决了. 由假设，剩下的数中至少有一个数字不是零.

如果 k 的数位少于 n，结论可能不成立. 考虑有 $b-2$ 位的数 111… 111，并取 $n=b-1$. 如果将任意 $j(0\leqslant j\leqslant n-1)$个数字改为零，则这个数对模 n 同余于 $n-j-1$，不可能是零.

问题 484 如图 239，设 O 为平行四边形的中心，作两边的平行线 OA、OB，设它们之间的夹角为 ω. 任何内接菱形的对角线都垂直相交于同一个中心 O.（想一想为什么?）令 P 和 Q 为菱形的两个相邻的顶点，且设 $\angle POA=\theta$. 由于菱形的面积是 $2\,\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$，我们需要求$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$的最小值.

现在有$\angle OPA=\pi-(\omega+\theta)$及$\angle OQB=\frac{\pi}{2}\pm\theta$(两种情形分别见图 239、图 240)，由正弦定理，

> 一名只是埋头做数学练习但从未解出一道数学题目的学生，就好比一个学会了棋子走法但从未下过一盘棋的人。数学中真正的事情就是下棋。
>
> 特纳(Stephen J. Turner)

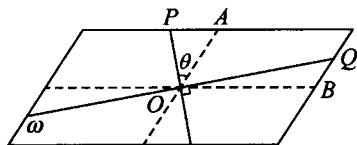


图 239

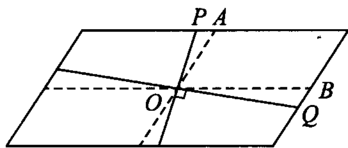


图 240

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega+\theta)},\quad \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}}=\frac{\sin\omega}{\cos\theta},$$

于是

$$\frac{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}=\frac{\sin^2\omega}{\sin(\omega+\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\omega}{\sin(\omega+2\theta)+\sin\omega}.$$

当 $\omega+2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}$ 时该式取最小值. 因此，如果分别作 AP 和 BQ 的垂线 OM 与 ON，则最小菱形的对角线将分别平分 $\angle AOM$ 和 $\angle BON$.

【评论】 这个解假定了 $\overline{AP}$ 小于 $\overline{OB}$ 及 $\overline{BQ}$ 小于 $\overline{OA}$. 如果不是这样，则最小菱形的一条对角线将是这个平行四边形的一条短对角线.

问题 485 由图 241 中的相似三角形得，$a=\frac{rc}{n}$，$b=\frac{rc}{m}$，$c^2=a^2+b^2$，且其面积的两倍是 $ab=r(a+b+c)$. 于是 $r=\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，且

$$\frac{r^2c^2}{mn}=ab=rc\left(\frac{r}{n}+\frac{r}{m}+1\right),$$

从而 $c=m+n+\sqrt{m^2+n^2}$，并且所求面积为

$$\frac{1}{2}ab=\frac{r^2c^2}{2mn}$$

$$=\frac{mn(m+n+\sqrt{m^2+n^2})^2}{2(m^2+n^2)}.$$

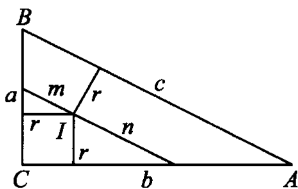


图 241

问题 486 令 p_r 表示从四个字母 c、d、e、f 中每次取 r 个作乘积而得到的所有乘积的和. 则 $p_1=-(a+b)$.

并且

$$p_1(p_1^2-3p_2)=c^3+d^3+e^3+f^3-3p_3$$
$$=-(a^3+b^3)-3p_3.$$

所以

$$p_3=\frac{1}{3}[(a+b)^3-(a^3+b^3)]-p_2(a+b)$$
$$=(a+b)(ab-p_2).$$

因此

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)$$
$$=a^4-a^3(a+b)+a^2p_2+$$
$$a(a+b)(ab-p_2)+p_4$$
$$=a^2b^2-abp_2+p_4$$
$$=(b+c)(b+d)(b+e)(b+f).$$

问题 487 因为 $2739726=9999\times274$，所以我们只要证明 9999 的 2～20000 倍中的每一个偶数倍的各位数字之和为 36 就足够了.

(i) 考虑 9999 的 1～10000 倍中的任一个倍数. 如果 $x<10000$，则 $9999(x+1)$，或 $10^4x+(9999-x)$ 有不超过 8 位的数字. 如果 x 的各位数字为 a、b、c、d，则 $9999(x+1)$ 的各位数字为

$$a、b、c、d、9-a、9-b、9-c、9-d,$$

所以其各位数字之和为 36.

(ii) 考虑 9999 的 10002～20000 倍中的每一个偶数倍. 因为 $9999\times10001=10^8-1$，所以如果把这加到 9999 的 1～9999 倍的任一个奇数倍上去，即如果把这加到一个各位数字是

a、b、c、d、$9-a$、$9-b$、$9-c$、$9-d$

($9-d$ 为奇数)的数上去，我们将得到一个各位数字是

1、a、b、c、d、$9-a$、$9-b$、$9-c$、$8-d$

的数，而这个数的各位数字之和为 36.

问题 488 因为 $|z_i|=|\overline{z_i}|$ 及 $z_i\overline{z_i}=1$,

$$\begin{aligned}&|z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2|\\=&|z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\\=&\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\\=&|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|\\=&|z_1+z_2+z_3|.\end{aligned}$$

因此 $k=1$.

问题 489 如果投注者对每一匹马都下注，即他押 $\frac{b_r}{a_r+b_r}$ 对 $\frac{a_r}{a_r+b_r}$ 赌第 r 匹马胜，那么如果第 r 匹马胜，他将赢得 $\frac{a_r}{a_r+b_r}$，同时输掉 $\sum\frac{b}{a+b}-\frac{b_r}{a_r+b_r}$. 因此他的净赢数为

$$\begin{aligned}&\frac{a_r}{a_r+b_r}-\sum\frac{b}{a+b}+\frac{b_r}{a_r+b_r}\\=&1-\sum\frac{b}{a+b}>0.\end{aligned}$$

问题 490 任意有限多个不相等的正数的算术平均值都大于它们的几何平均值，即

$$\begin{aligned}&p_1+p_2+\cdots+p_m\\>&m\sqrt[m]{p_1p_2\cdots p_{m-1}p_m}.\end{aligned}$$

将同样的定理应用于它们的倒数，再相乘得

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{p_i}\right)>m^2.$$

设 p_i 为每次取所给方程的 r 个根的乘积，则

$$\sum p_i=C_n^r\frac{a_r}{a_0},\quad \sum\frac{1}{p_i}=C_n^r\frac{a_{n-r}}{a_n}.$$

因为在每一个和式中的项数 m 是 C_n^r，所以

$$C_n^r\frac{a_r}{a_0}C_n^r\frac{a_{n-r}}{a_n}>(C_n^r)^2,$$

或

$$a_ra_{n-r}>a_0a_n.$$

问题 491 所给不等式等价于

$$(u-v)(w-1)\geqslant0 \quad 和 \quad (w-v)(1-u)\geqslant0.$$

如果 $u=w=1$，则不等式对一切 v 值都成立.

如果 $u=1$，$w>1$，则当且仅当 $v\leqslant u=1$ 时，不等式成立.

如果 $w=1$，$u<1$，则当且仅当 $v\leqslant w=1$ 时，不等式成立.

如果 $u<1<w$，则当且仅当 $v\leqslant u$ 时，不等式成立.

问题 492 令 (u, v, w) 与 (p, q, r) 分别表示椭球面和平面上的点. 我们希望确定

$$D^2=(u-p)^2+(v-q)^2+(w-r)^2$$

的最小值. 由柯西不等式，

$$\begin{aligned}&D^2(A^2+B^2+C^2)\\\geqslant&[A(u-p)+B(v-q)+C(w-r)]^2\\=&[1-(Au+Bv+Cw)]^2,\end{aligned}$$

且当 (p, q, r) 形如 $(u+\lambda A, v+\lambda B, w+\lambda C)$ 时等号成立. 因为平面与椭球面不相交，又因为椭球面与原点在平面的同一侧，

$$1>Au+Bv+Cw.$$

所以，为求 D 的最小值，只要求 $Au+Bv+Cw$ 的最大值. 再一次由柯西不等式，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)\\\geqslant&(Au+Bv+Cw)^2,\end{aligned}$$

且当 (u, v, w) 形如 $(\mu Aa^2, \mu Bb^2, \mu Cc^2)$ 时等号成立. 因此

$$\begin{aligned}&\max(Au+Bv+Cw)\\=&\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2},\end{aligned}$$

从而最短距离是

$$D_{\min}=\frac{1-\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

该距离当

$$(u, v, w)=(\mu Aa^2, \mu Bb^2, \mu Cc^2),$$

$$\mu^2(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)=1,$$

$$(p, q, r)=(u+\lambda A, v+\lambda B, w+\lambda C),$$

$$\lambda=\frac{1-\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}{A^2+B^2+C^2}$$

时取到.

问题 493 为了求法线方程，我们先来求切线方程. 如果 $y=mx+b$ 与 $y^2=2ax$ 相切，则方程$(mx+b)^2-2ax$ 仅有一个二重根. 从而其判别式必为零，即 $b=\frac{a}{2m}$. 于是，如果(h, k)为切点，则 $k^2=2ah$，且 $k=mh+\frac{a}{2m}$，于是 $0=(km-a)^2$. 因此 $m=\frac{a}{k}$，且过点(h, k)的法线方程为

$$y-k=-\frac{k}{a}(x-h).$$

将其与 $y^2=2ax$ 联立，得

$$k^2(x-h)^2-2ak^2(x-h)+a^2k^2-2a^3x=0.$$

由此（利用 $k^2=2ah$）得 $k^2(x-h)=2a(a^2+k^2)$，可求得弦与抛物线的另一个交点的横坐标.

弦的两个端点为(h, k)和$\left(\frac{(2a^2+k^2)^2}{2ak^2}, \frac{-(2a^2+k^2)}{k}\right)$，且弦长的平方 L^2 是$\frac{4}{k^4}(k^2+a^2)^3$. 令 $t^3=k$，则

$$\left(\frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{t^6+a^2}{t^4}.$$

最后，由算术-几何平均值不等式，

$$\frac{t^6}{2}+\frac{t^6}{2}+a^2\geqslant 3\left(\frac{t^{12}a^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

从而

$$\left(\frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\geqslant 3\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

（当且仅当 $t^6=2a^2$，或 $k^2=2a^2$ 时等号成立），且

$$L_{\min}=3\sqrt{3}a.$$

问题 494 设 u_n 表示当艾丽丝有 n 枚 5 美分硬币时赢得鲍勃所有钱的概率. 因为艾丽丝在下一次游戏时或赢或输，所以

$$u_n=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_{n-1},$$

或

$$u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=0.$$

因此，注意到 $u_0=0$，我们有

$$u_n-u_{n-1}=u_{n-1}-u_{n-2}=u_{n-2}-u_{n-3}$$

$$=\cdots=u_2-u_1=u_1.$$

从而 $u_n=nu_1$，并且因为 $u_{a+b}=1$，$u_1=\frac{1}{a+b}$，所以 $u_a=\frac{a}{a+b}$.

问题 495 如果三点中有任何点在正方形内，则可将这些点移到边界上而不减少这些点之间的距离. 如果三点都在边界上，且都不在顶点上，则可将其中一个点移到顶点上，同样也不会减少这些点之间的距离. 这引导我们去考虑如图 242 的图形，并且问题转化为确定 Q 和 R 的位置，使$\triangle PQR$ 的最短边尽可能长. 这种情形出现于 PQR 是等边三角形时（见图 243). 此时 PQ 与正方形左面那条边的夹角为 15°，且

$$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

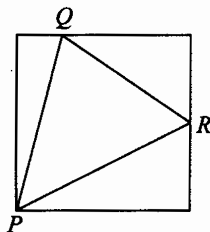


图 242

问题 496 将这个矩形分成两个单位正方形. 由鸽笼原理，两个正方形中必有一个至少包含 3 个点. 这 3 个点之间的最短距离按

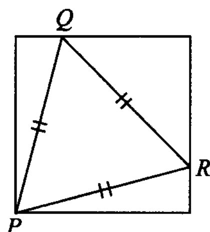


图 243

问题 495 中的图 243 取得最大值，因此解由图 244 给出.

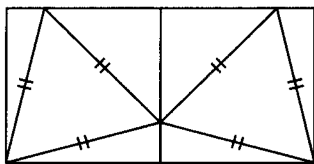


图 244

问题 497 通解由递推公式

$$x_1=2,\ x_r=x_1x_2\cdots x_{r-1}+1\ (1\leqslant r\leqslant n)$$

给出. 首先注意到，当 $n=1$ 时($x_1=2$)满足方程. 假定当 $n=r$ 时，集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 满足方程，则对 $n=r+1$，有

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{r+1}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{r+1}}$$
$$=1-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_r}+\frac{1}{x_{r+1}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{r+1}}$$
$$=1+\frac{1}{x_{r+1}}-\frac{x_{r+1}-1}{x_1x_2\cdots x_{r+1}}=1.$$

这就完成了归纳法的证明.

对 $n=1$ 和 2，解是唯一的(x_i 的置换除外). 对每一个 $n>2$，都存在无限多个解. (参见问题 179.)

问题 498 将四面体 $ABCD$ 沿 AB、AC 和 AD 割开，如图 245 平摊. 由于 $\angle A_1BA_2$、$\angle A_2CA_3$ 和 $\angle A_3DA_1$ 都是平角，B、D 和 C 是外面的大三角形的中点，于是有 $\overline{AB}$(即 $\overline{A_1B}$) $=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{DA}$(即 $\overline{DA_3}$)和 $\overline{CA}$(即 $\overline{CA_2}$) $=\overline{BD}$.

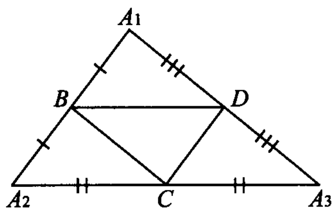


图 245

问题 499 令所给序列

$$\{3, -2, 12, -8, 48, -32, 192, \cdots\}$$

的第 i 项为 a_i. 我们有

$$1=a_1+a_2,\quad 2=a_2+a_3+a_4,\ 3=a_1.$$

假设 $n\geqslant 4$，并且所有的整数 1，2，…，$n-1$ 都能写成一些不同的 a_i 的和. 现分四种情形讨论：

(1) $n=4k$，$1\leqslant k<n$. 如果 $k=\sum\limits_{i\in S}a_i$，其中 $S\subset\{1, 2, 3, \cdots\}$，则 $n=\sum\limits_{i\in S}a_{i+2}$ 为所要求的表示；

(2) $n=4k+1$，$1\leqslant k<n$. 如果 $k=\sum\limits_{i\in S}a_i$，则 $n=a_1+a_2+\sum\limits_{i\in S}a_{i+2}$；

(3) $n=4k-2$，$2\leqslant k<n$. 如果 $k=\sum\limits_{i\in S}a_i$，则 $n=a_2+\sum\limits_{i\in S}a_{i+2}$；

(4) $n=4k+3$，$1\leqslant k<n$. 如果 $k=\sum\limits_{i\in S}a_i$，则 $n=a_1+\sum\limits_{i\in S}a_{i+2}$.

米勒(G. A. Miller)的一位过去的学生有一次回到母校伊利诺伊大学，他注意到米勒的穿着极其破旧。这位学生一直十分热爱米勒，现在他已是一名成功的商人。因此他送给米勒一件礼物——一张 100 美元的支票。让他很不解的是，这张支票一直没有兑现。原因后来弄清楚了：米勒逝世后给学校留下了 1 000 000 美元。

问题 500 对 E^3，考虑从一个正四面体的中心到四个顶点的射线．由对称性，任何两条射线之间的夹角都相等．对 E^n，考虑从一个正则单形（n 维四面体）的中心发出的 $n+1$ 条射线．设 $\overrightarrow{OV_1}$，$\overrightarrow{OV_2}$，…，$\overrightarrow{OV_{n+1}}$ 表示从中心 O 到各顶点的向量．由对称性，（需证明！）这个单形的外心与形心为同一点．因此 $|\overrightarrow{OV_i}|=R$，$i=1，2，\cdots，n+1$，且

$$\overrightarrow{OV_1}+\overrightarrow{OV_2}+\cdots+\overrightarrow{OV_{n+1}}=\vec{0},$$

于是

$$(\overrightarrow{OV_1}+\overrightarrow{OV_2}+\cdots+\overrightarrow{OV_{n+1}})\cdot(\overrightarrow{OV_1}+\overrightarrow{OV_2}+\cdots+\overrightarrow{OV_{n+1}})=0,$$

或

$$(n+1)R^2+2C_{n+1}^2\overrightarrow{OV_i}\cdot\overrightarrow{OV_j}=0.$$

最后得，若 θ 是任何一对向量（$\overrightarrow{OV_i}$，$\overrightarrow{OV_j}$）之间的夹角，则

$$\cos\theta=-\frac{1}{n},\ \theta=\arccos\left(-\frac{1}{n}\right).$$

工具箱

读者自己具有的解题技巧将有助于解决这本问题集中的许多问题，与此同时其他不少问题需要某些数学领域中的基本知识. 这里附上的是可能需要的简要"工具"清单，你们可以在教科书中找到那些事实较为完整的细节，而那些事实是你们自己不愿(或不可能)加以一一验证的.

A. 组合数学

A1 "r 阶乘"：

$$r!=r\cdot(r-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1,$$

是有序地排列 r 个不同对象的方法的种数.

A2 "n 中选择 r"：

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot r},$$

是从 n 个不同对象中选择 r 个对象(与对象的次序无关)的方法的种数.

A3 集合记号：若 A、B 均为集合，那么

"A 与 B 的并集"

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；

"A 与 B 的交集"

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；

"A 的补集"

$\complement_U A=\{x|x\in U,x\notin A\}$(其中 U 为全集).

注意 $A\cap B\subseteq A\cup B$($\subseteq$表示"包含于").

A4 空集：不包含任何元素，记为$\varnothing$.

A5 集合 A 中的元素个数记为 $\#A$，也可记为$|A|$.

A6 鸽笼原理(狄利克雷抽屉原理)：如果将 n 个物体放入到个数小于 n 的盒子中，那么必定有一个盒子至少包含 2 个物体.（伴随对盒子与物体的其他选择，由鸽笼原理可以导出一系列类似的问题.）

A7 容斥原理：记 S 为 n 个物体所组成的集合，P_1、P_2、…、P_m 为 m 个性质，对 S 中的每个物体 x 与每个性质 P_i，x 要么具有性质 P_i，要么不具有性质 P_i. 又记 $f(i,j,\cdots,k)$ 为 S 中具有性质 $P_i,P_j,\cdots,P_k$(也可能具有其他性质)的物体的个数. 那么 S 中不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的物体的个数为

$$n-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}f(i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}f(i,j)+\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant m}f(i,j,l)+\cdots+(-1)^m f(1,2,\cdots,m).$$

B. 算术

B1 除法算式：若 a、b 为任意两个正整数，那么存在非负整数 q(商)与 r(余数)，使得 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$.

B2 最大公因数：若 a、b 为任意两个整数，且存在整数 c，使 $ac=b$，我们就称"a 整除 b"，或"b 是 a 的倍数".

如果一个整数 a 能同时整除 m 与 n，那么 a 就称为 m 与 n 的公因数.

而 m 与 n 的最大公因数，记为(m,n)或 $\gcd(m,n)$，是能够同时整除 m 与 n 的最大整数；m 与 n 的任一公因数必整除(m,n).

B3 若两个正整数的最大公因数为1,则称它们为互素.

B4 若b是大于1的一个正整数,那么每一个正整数a总可写成$a=a_0+a_1b+a_2b^2+\cdots+a_nb^n$的形式,其中$0\leqslant a_i\leqslant b-1(i=0,1,\cdots,n)$. a的以b为基的数字表达式为

$$a=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0.$$

(上下文应避免产生与乘法记号的混淆.)

B5 $[x]$为不超过实数x的最大整数,如$[-1.5]=-2,[3]=[\pi]=3$. 注意到总有$x-1<[x]\leqslant x$.

若n、k与r是满足$1\leqslant r\leqslant k-1$的任意正整数,那么$\left[\frac{n}{k}\right]$就是不超过$n$的$k$的正整数倍数的个数;$\left[\frac{n+r}{k}\right]$是不超过$n$,且被$k$除余数为$k-r$的正整数的个数.

B6 $a\equiv b \pmod m$,即"a与b关于模m同余",它是一种记号,表示a与b分别除以m所得的余数相等(即$a-b$是m的倍数). 这一关系满足下列法则:

若$a\equiv b \pmod m$,$c\equiv d \pmod m$,则$a+c\equiv b+d \pmod m$,$ac\equiv bd \pmod m$.

B7 平方:

$$n^2\equiv\begin{cases}0 \pmod 4,\text{当 } n \text{ 为偶数},\\ 1 \pmod 4,\text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

$$n^2\equiv\begin{cases}0 \pmod 8,\text{当 } n\equiv 0 \pmod 4,\\ 4 \pmod 8,\text{当 } n\equiv 2 \pmod 4,\\ 1 \pmod 8,\text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

B8 费马小定理:若a与n为两个互素的整数,则$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$,其中$\varphi(n)$是$\{1,2,3,\cdots,n-1\}$中与$n$互素的整数个数. 若$n=p$为一奇数,那么只要$\gcd(a,p)=1$,则$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

且对任意整数a,$a^p\equiv a \pmod p$.

若k是使$a^k\equiv 1 \pmod n$成立的最小的正整数,则k整除$\varphi(n)$.

B9 垛积数:若一些点按一个正多边形列阵,则这些点的个数称为垛积数(或形数). 其中三角形数为1,3,6,10,15,…;四边形数(平方数)为1,4,9,16,25,…;五边形数为1,5,12,22,…,如图246所示.

B10 线性丢番图方程:若a、b、c是三个整数,g是a与b的最大公因数(参见B2),则方程$ax+by=c$有整数解的充分必要条件是g整除c.

若(x,y)是其某一个解,则

$$\left\{\left(x_0+\frac{bt}{g},y_0-\frac{at}{g}\right)\middle|\, t\text{ 为整数}\right\}$$

是方程的所有整数解所组成的集合.

特别地,若a、b互素(参见B3),则$ax+by=1$有整数解. 与此互逆,若方程$ax+by=1$有整数解,则a与b一定互素.

B11 二次剩余:若m是一正整数,a是与m互素的整数,那么a是模m的二次剩余的充分必要条件为存在某一整数x,使$x^2\equiv a \pmod m$. 若a不是二次剩余,则称a为二次非剩余.

对前面几个素数p,我们列出不超过p的关于模p的二次剩余:

p	二次剩余
2	1
3	1
5	1,4
7	1,2,4
11	1,3,4,5,9
13	1,3,4,9,10,12
17	1,2,4,8,9,13,15,16
19	1,4,5,6,7,9,11,16,17

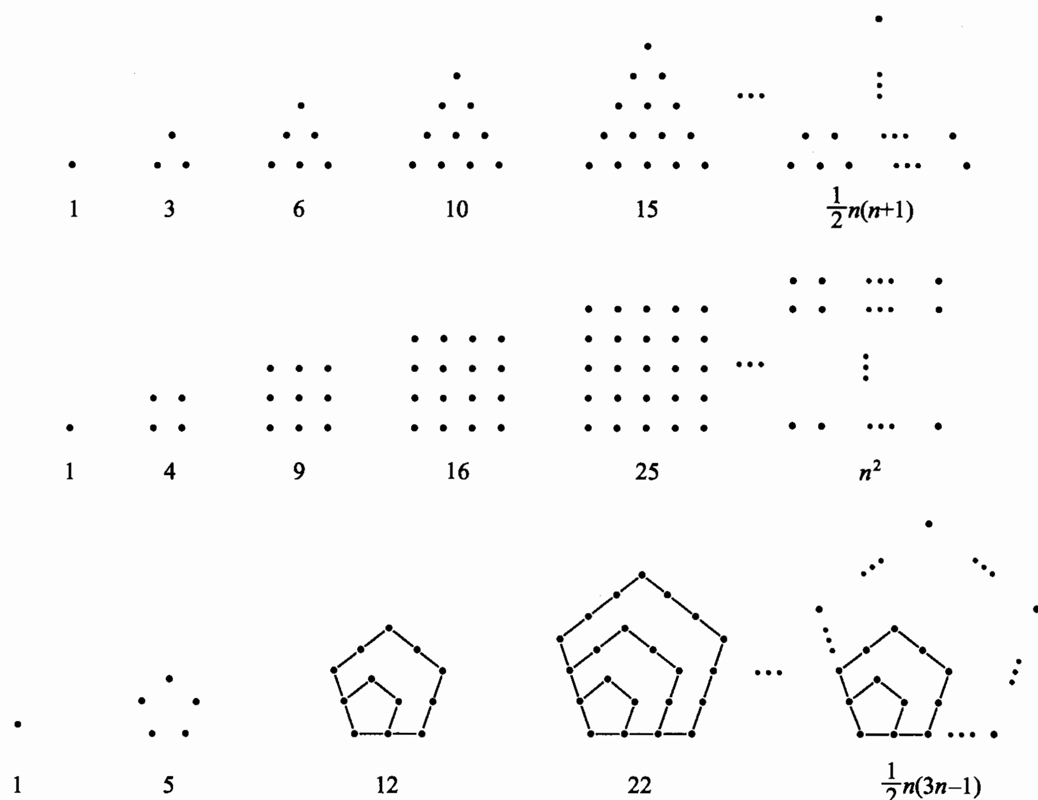


图 246

B12 舍九法：若 $a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$ 是一个正整数在基 10 下的数字表达式，那么这个整数除以 9 所得的余数等于 $a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0$ 除以 9 所得的余数．特别地，一个数能被 9 整除的充分必要条件是它的各位数字之和能被 9 整除．

B13 11 的可除性：若 $a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$ 是一个正整数在基 10 下的数字表达式，那么这一整数与

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^r a_r$$

关于模 11 同余．

B14 威尔逊定理：正整数 n 为一素数的充分必要条件是

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$$

C. 代数

C1 求和：

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{i=m}^{n} a_i;$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

等比数列的和：

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

等差数列的和：

$$\sum_{k=0}^{n} (a+kd) = \frac{n+1}{2}(2a+nd),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

若数 a 与求和的序号无关,则

$$\sum_{i=m}^{n}a=(n-m+1)a,$$

其中 $n-m+1$ 是和式中项的个数.

C2 二次求和的顺序可以转换.

例如:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ii})$$
$$=(a_{11})+(a_{21}+a_{22})+(a_{31}+a_{32}+a_{33})+\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})$$
$$=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1})+(a_{22}+a_{32}+\cdots+a_{n2})+(a_{33}+\cdots+a_{n3})+\cdots+a_{nn}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{jj}+a_{j+1,j}+\cdots+a_{nj})$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}.$$

这一转换可以直观地展示:将 a_{ij} 作为一个与平面上的点相对应的有序数对 (i,j) 的函数.

函数的定义域是集合 $\{(i,j)\mid 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n\}$,如图 247 所示.

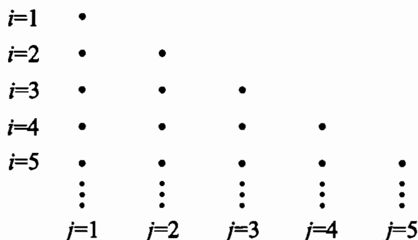


图 247

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$ 表示先沿每一行将 a_{ij} 相加,再将所得的和相加;而 $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=j}^{n}a_{ij}$ 表示先沿每一列将 a_{ij} 相加,再将所得的和相加.

其他的二重求和实例可进行类似处理.

C3 二次理论:若 a、b、c 均为实数,且 $a\neq 0$,则二次多项式 ax^2+bx+c 根的情况如下:

若 $b^2-4ac>0$,则为两个不相等的实数;

若 $b^2-4ac=0$,则为两个相等的实数;

若 $b^2-4ac<0$,则为两个不相等的非实数.

两根之和为 $-\frac{b}{a}$,两根之积为 $\frac{c}{a}$.

若 $b^2-4ac<0$,则对所有的 x,

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a^2}(4ac-b^2)\right],$$

与 a 同号.

两根可以表达为

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{与}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

C4 多项式:剩余定理断言,多项式 $p(x)$ 被 $(x-a)$ 除后所得的余式必是 $p(a)$. 由此立即可得因子定理:a 是 $p(x)$ 的一个根的充分必要条件是 $(x-a)$ 能除尽 $p(x)$.

任一 n 次多项式至少有一个复根,至多有 n 个根. 事实上,对于至多有限多个不同的 x 值,多项式 $p(x)$ 可以取到任意给定的值.

C5 多项式(根与系数):若多项式 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 有根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$(可以有重复),则

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n),$$

且根与系数的关系如下:

$$r_1+r_2+\cdots+r_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{i\neq j}r_ir_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s} = (-1)^s \frac{a_{n-s}}{a_n}$$

（和式共有 C_n^s 项），

$$\vdots$$

$$r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

C6 多项式根的乘方的和：若多项式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 有根 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，记 $s_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$，有

$$s_0 = n, s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$s_2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}.$$

一般地，对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，有

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1} s_1 + k a_{n-k} = 0,$$

而对 $n \leqslant k$，有

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \cdots + a_0 s_{n-k} = 0.$$

C7 多项式(重根)：若多项式 $p(x)$ 有根 r，当且仅当存在多项式 $q(x)$，使 $p(x) = (x-r)^m q(x)$，$q(r) \neq 0$ 时，我们称 r 是 $p(x)$ 的 m 重根．二重根是重数为 2 的根，三重根是重数为 3 的根．重数为 1 的根称为单根．

若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$，则 $p(x)$ 的导数 $p'(x)$ 定义为

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

$p'(x)$ 也可写为

$$\lim_{t \to x} \frac{p(t) - p(x)}{t - x}.$$

当且仅当 $p'(r) = 0$ 时，$p(x)$ 的根 r 是重数至少为 2 的重根．

（一种证明方法是将 $p(t)$ 写成

$$p(t) = (t-r)f(t).$$

这时若 r 是重数至少为 2 的重根，则 $f(r) = 0$．因此

$$p'(r) = \lim_{t \to r} f(t) = f(r) = 0.$$

另一方面，若假设 $p'(r) = 0$，则

$$f(r) = \lim_{t \to r} f(t) = p'(r) = 0.$$

因而存在多项式 $g(t)$，使

$$f(t) = (t-r)g(t).$$

所以

$$p(t) = (t-r)^2 g(t),$$

即 r 是重数至少为 2 的重根．）

C8 多元多项式的因式分解：记 $P(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为一给定的待分解的多项式，寻找 P 的因式的一种方法是：观察当 P 内的变量 x_0 用其余变量的某个多项式 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取代时，P 是否会恒等于零．若是，则 $x_0 - Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 必定是 P 的一个因式．

C9 对于正整数 n，有因式分解

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

若 n 为奇数，有因式分解

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

C10 多项式(除法与余式)：若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是两个多项式，则一定存在唯一的一对多项式 $q(x)$(商式)与 $r(x)$(余式)，使 $u(x) = q(x)v(x) + r(x)$，其中 $r(x)$ 的次数 $<$ $v(x)$ 的次数．

C11 齐次多项式：一个多元多项式为齐次多项式的充分必要条件是其各项具有相同的次数．更专业地说，$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是齐 k 次多项式的充分必要条件是

$$p(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) \equiv t^k p(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

例如，对三个变量 x、y 与 z，$ax + by + cz$ 是齐一次多项式，$ax^2 + by^2 + cz^2 + hxy + gxz + fyz$ 是齐二次多项式(其中 a、b、c、f、g、h 均为常系数)．

C12 对称多项式：一个多元多项式是对称多项式的充分必要条件是在变量的任意排列(或交换)下保持不变.

如下所示分别是二元、三元与 n 元初等对称函数：

$x+y$, xy;

$x+y+z$, $xy+xz+yz$, xyz;

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} x_ix_jx_k,$$

$$\vdots$$

$x_1x_2\cdots x_n$.

C13 一个首项系数为 1 的整系数多项式的每一个有理数根一定是整数. 这一结论的另一种说法是，若一个首项系数为 1 的整系数多项式有一个非整数根，那么这个根一定是一个无理数或非实数.

C14 笛卡儿正负号规则：如果 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个实系数多项式，按顺序写下所有非零系数的符号(+或−)，那么这一多项式的正根个数必不超过变号次数. 因此，若一个实系数多项式的所有非零系数均为正数，那么这一多项式必定没有正根. 例如，$8x^9-7x^6-4x^5+3x^3+1$ 的正根个数不会超过 2.

C15 多项式的介值定理：若一个实系数多项式在实数 u 处取负值，而在实数 v 处取正值，那么在 u 与 v 之间必定至少存在一个该多项式的根. (这是诸如 $\sin x$、e^x 或 $\ln x$ $(x>0)$之类的连续函数所具有的介值定理的一个特例.)

C16 多项式(由数值确定)：若对正整数 n，记

$$(a_0,b_0),(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$$

为 $n+1$ 个复数对，那么一定存在一个次数不超过 n 的多项式 p，使

$$p(a_i)=b_i \quad (i=0,1,\cdots,n).$$

更一般地，次数不大于 n 的多项式由具体指定的 $n+1$ 个值所唯一确定.

C17 复数：每一个复数 $x+y\mathrm{i}$ 可以表达为如下形式：

$$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为(复数的)绝对值(或模)，$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 为辐角.

表达式 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可以缩写为 $\mathrm{cis}\,\theta$.

C18 单位根：多项式 x^n-1 有 n 个不同的根：

$$1,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{n},\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{n},\cdots,$$

$$\mathrm{cis}\,\frac{2s\pi}{n},\cdots,\mathrm{cis}\,\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

它们被称为 n 次单位根. 除 1 之外的每个 n 次单位根必定是多项式 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1$ 的根.

C19 共轭：若 $a+b\sqrt{d}$ 是一个含有有理数 a、b 与 d 的根式，那么它的共轭为 $a-b\sqrt{d}$. 这个根式与它的共轭的乘积是有理数 a^2-b^2d.

同样，复数 $x+y\mathrm{i}$(x、y 为实数)与它的共轭 $x-y\mathrm{i}$ 的乘积是正实数 x^2+y^2.

C20 矩阵：一些数按 m 行与 n 列所作的矩形排列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵.

2×2 矩阵及 3×3 矩阵的和与积如下给出：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+u & e+v & f+w \\ g+x & h+y & k+z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bu+cx & aq+bv+cy & ar+bw+cz \\ dp+eu+fx & dq+ev+fy & dr+ew+fz \\ gp+hu+kx & gq+hv+ky & gr+hw+kz \end{pmatrix}.$$

这些定义可以推广到两个 $m\times n$ 矩阵的和，以及 $m\times n$ 矩阵与 $n\times k$ 矩阵的积. 乘法的结合律、乘法对加法的分配律成立，但交换率不成立.

C21 记

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

为具有未知量 x、y、z 的 3 个线性方程所组成的线性方程组.

这一方程组对 x、y、z 有唯一解的充分必要条件是定义为 $a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的值不为零.

若这一行列式的值为零，则这一方程组或者无解，或者有无穷多个解.

D. 不等式

D1 实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqslant 0), \\ -x & (x<0). \end{cases}$$

对每一实数 x，有

$$|x|\geqslant 0,\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|.$$

若 x 与 y 均为实数，有

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|,$$
$$|xy|=|x||y|,$$
$$||x|-|y||\leqslant |x-y|.$$

D2 实数的平方或平方和非负.

D3 非负实数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值. 即若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\geqslant 0$，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

特别地，若 $a>0$，$b>0$，则

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

D4 柯西-施瓦茨不等式：对于给定的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

D5 闵可夫斯基不等式：若 $p>1$，那么对于正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$[(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\cdots+$$
$$(a_n+b_n)^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant (a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}+$$

$$(b_1^p+b_2^p+\cdots+b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

D6 赫尔德不等式：若 p、q 为两个大于1的实数，且满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

则对正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$
$$\leqslant(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $p=q=2$ 时，即得柯西-施瓦茨不等式(D4).

D7 广义平均值：记 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足条件 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ 的任 n 个正数. 对正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，我们定义如下各种平均值：

$$M_0=\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_k},$$

$$M_t=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k^t\right)^{\frac{1}{t}}\quad(t\neq 0,\ t\text{ 为实数}),$$

$$M_\infty=\max_k x_k,\quad M_{-\infty}=\min_k x_k.$$

M_1 为加权算术平均值，M_0 为加权几何平均值，M_{-1} 为加权调和平均值.

对 $s\leqslant t$，有

$$M_{-\infty}\leqslant M_s\leqslant M_t\leqslant M_\infty.$$

经常用到的情形是 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时的各种不等式.(参见D3)

D8 詹森不等式：记 $f(x)$ 为一元实变量的实值函数. $f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是对 f 定义域内的任意的 u 与 v，以及对任意 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，都有

$$f(tu+(1-t)v)\leqslant tf(u)+(1-t)f(v).$$

凸函数的图象如图248所示.

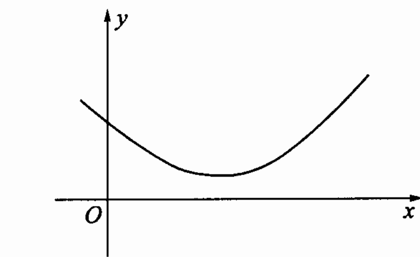


图 248

凸函数 $f(x)$ 具有如下性质：对任意的 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 和满足条件 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$a_i\geqslant 0$ 的任意的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有

$$f(a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n)$$
$$\leqslant a_1f(u_1)+a_2f(u_2)+\cdots+a_nf(u_n).$$

函数 $f(x)$ 是凹函数的充分必要条件是对任意的 u 与 v，以及对任意的 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，都有

$$f(tu+(1-t)v)\geqslant tf(u)+(1-t)f(v);$$

事实上，对于满足如上条件的 u_i 与 a_i 的凹函数，有

$$f(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)$$
$$\geqslant a_1f(u_1)+\cdots+a_nf(u_n).$$

凹函数的图象如图249所示.

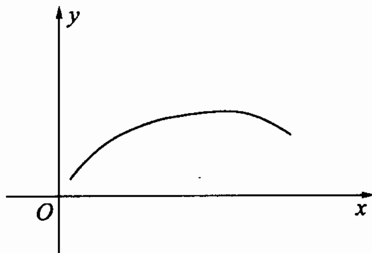


图 249

D9 经常用到的需要我们记住的特殊不等式有：

(a) 对任意实数 t，$t(1-t)\leqslant\frac{1}{4}$；

(b) 对任意>0的实数 t，$t+t^{-1}\geqslant 2$.

E. 几何与三角

大量的结论来自几何知识. 此处没有具

体说明的那些结论可以在任意一本几何教材中找到.

记$\overline{AB}$为直线段 AB 的长度.

E1 凸 n 边形的内角和为 $2n-4$ 个直角,外角和为 4 个直角. 特别地,三角形的内角和为 180°. 三角形的任一外角等于不相邻的两个内角之和.

E2 三角形全等定理.

E3 相似三角形定理.

E4 毕达哥拉斯定理(勾股定理).

E5 与平行线被截所产生的角有关的定理. 被平行线所截出的两条线段成比例.

E6 两平行线之间等底的三角形面积相等.

E7 包含于一个平行四边形的任一三角形的面积至多是这个平行四边形面积的一半. 记号 $S_{\triangle ABC}$ 与 S_{ABCD} 可能被用来表示$\triangle ABC$与四边形 $ABCD$ 的面积.

E8 三角形的任一边的长度小于其他两边长度之和.

E9 三角形中,联结两边中点的直线平行于第三边.

E10 $\triangle ABC$ 中,D 为 BC 边上一点,且 AD 平分$\angle A$,那么

$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{CD}.$$

若$\angle A$ 外角的平分线交 BC 于 E,则

$$\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{CE}.$$

E11 一个圆内,等弧或同弧所对的圆周角相等. 圆上一段弧所对的圆外角、圆内角分别小于、大于该弧所对的圆周角. 直径所对的圆周角为直角. 一条线段所对的给定角的顶点的轨迹是由这条线段的两个端点所确定的两段圆弧. 斜边固定的直角三角形的直角顶点的轨迹是以斜边为直径的一个圆.

E12 若$\triangle ABC$ 为一直角三角形,D 为斜边 BC 的中点,P 为由 A 到 BC 的垂线的垂足,那么

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}, \quad \overline{AP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{CP}.$$

E13 一个四边形为圆内接四边形的充分必要条件是每一对对角之和为 180°.

E14 圆弧所对的圆心角是其所对圆周角的 2 倍.

E15 由圆的切线与过切点的弦所夹的角等于该弦所对的相反方向上的圆周角. 过圆上某一点的直径垂直于过该点的切线.

E16 给定一点与不过该点的一条直线,则直线上与该点距离最短的点是该点所引直线的垂线的垂足.

E17 设点 P 位于圆 TAB 外,且 PT 为圆的切线,PAB 为圆的割线,那么

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

E18 若 APC 与 BPD 为圆 $ABCD$ 内的两条相交的弦,则

$$\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{PD}.$$

E19 作图:角平分线,线段的垂直平分线,平行线,点到直线的垂线,过三点的圆,过两点且与一给定直线相切的圆.

E20 梅尼劳斯定理:如图 250,一直线分别截$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB(或延长线)于

F、G、H 三点，则

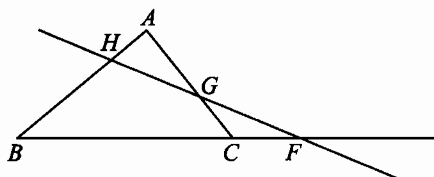


图 250

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{GA}} = -1.$$

E21 三角形的一条塞瓦线是指联结一个顶点与它所对的边(或其延长线)上的一点的线段. 塞瓦定理告诉我们，若 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条共点的塞瓦线，那么

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$

E22 解析几何：两点间的距离，直线的方程，二次曲线的方程.

E23 直角坐标平面上三角形的面积：记 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3) 为平面上的 3 个点，由这 3 点构成的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\left|(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)\right|.$$

E24 平面内点到直线的距离：记 $ax+by=c$ 为直角坐标平面内的一条直线，(x_1, y_1) 为平面内的一点. 那么该点到该直线的垂直距离为

$$\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

E25 抛物线：如图 251，平面内给定点 F 与直线 d，到点 F 与到直线 d 的距离相等的点的轨迹称为抛物线. 直线 d 称为准线，点 F 称为焦点. 过点 F 且与直线 d 垂直的直线 l 为抛物线的轴，它与抛物线的交点 V 称为抛物线的顶点. 记点 P 为抛物线上的点，那么过点 P 与轴平行的直线与直线 PF 所成的角被抛物线在 P 处的法线平分.（这称为反射原理.）

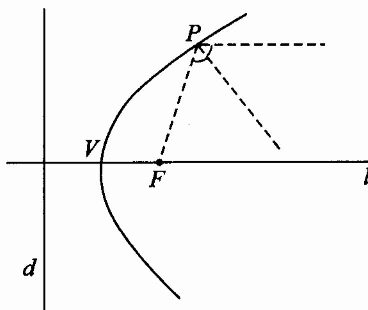


图 251

E26 空间中到两个相异点 P、Q 距离相等的点的轨迹为过 PQ 中点且与 PQ 相垂直的平面.

E27 若空间内的点 A、B、C、O 满足 $AO\perp CO$，$BO\perp CO$，则对 AB 或 AB 延长线上的任意点 P，有 $PO\perp CO$.

E28 一个平面图形或立体图形总包含由图形上任两点所连线段，则称该图形为凸的.

E29 一个多面体是一个空间图形，它的各个表面是平面多边形. 一个四面体是具有 4 个三角形面的多面体. 一个多面体是正多面体的充分必要条件是它的各个表面都是全等的正多边形，且从每个顶点处出发的棱的条数相等. 只有 5 种正多面体：正四面体(具有正三角形表面)、立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 若一个无孔的多面体有 V 个顶点、E 条棱和 F 个面，那么由欧拉公式给出关系：

$$E+2=F+V.$$

E30 当且仅当一个空间内的图形包含于某一平面时，称它是共面的．否则，就称它是异面的．若两条直线既不相交也不平行，则称它们是异面的．相交于一个点的各直线称它们是共点的．

E31 当且仅当空间内的一个集合包含于某个球的表面时，称它是共球面的．给定 4 个不共面的点，那么一定存在唯一的球面，恰好包含这 4 个点．一个球面上的圆的圆心与球心重合，则称该圆为一个大圆．

E32 两个相交平面所成的角定义为两个平面的法线相交所成的角．

E33 三面角不等式：如图 252，设三条共点的线两两在交点处所成的角为 A、B 与 C（其中 $A=\angle KNL, B=\angle LNM, C=\angle KNM$），那么 $A+B\geqslant C$.

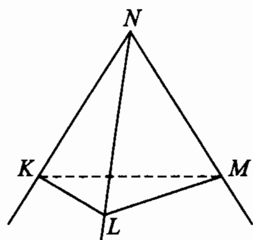


图 252

E34 空间的一个锥体是包含一个平面集合（它的底面）和这个平面外一点（它的顶点）的最小的凸集．例如，四面体、棱锥、直圆锥（冰淇淋锥）．一个锥体的体积等于底面积与高（顶点到底面的垂直距离）的乘积的 $\frac{1}{3}$.

E35 如果一个几何图形关于点 O 成中心对称，则每当 P 在该图形上，且 O 为线段 PQ 的中点时，点 Q 也必在这个图形上．

E36 位似（中心相似）是一种变换，它固定一点 O（作为其中心），且将每一点 P 映射到点 P'，使 O、P、P' 共线，且 $\overline{OP}:\overline{OP'}=k$ 为一常数（k 可以为正，也可以为负）.

E37 德萨格定理：若两个三角形的对应顶点的连线或者平行或者共点，那么其对应边的交点共线．其逆命题亦成立：若两个三角形对应边的交点共线，那么其对应顶点的连线或者平行或者共点．

E38 借助于三条互相垂直的坐标轴，空间内的每一点可用坐标 (x,y,z) 表示．坐标分别为 (x,y,z) 与 (u,v,w) 的两点之间的距离为 $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$.

E39 记 $\overrightarrow{AB}$ 为由点 A 到点 B 的向量．关于一个固定的参照点 O，每一点 P 有一个对应的向量 $\overrightarrow{OP}$．向量集合 $\{\overrightarrow{A_iB_i} \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 线性无关的充分必要条件是：仅当实数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 满足 $r_1=r_2=\cdots=r_n=0$ 时，$r_1\overrightarrow{A_1B_1}+r_2\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+r_n\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$ 成立．这意味着没有一个向量可以表示为其他向量的倍数的和．

E40 设 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为两个向量．点 P 位于线段 AB 上的充分必要条件是存在某个数 t $(0\leqslant t\leqslant 1)$，使 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

E41 空间向量：设 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 是两个三维空间中的向量，θ 为两向量的夹角，则

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta.$$

此外，当 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 平行时，$\vec{x}\times\vec{y}=\vec{0}$；否则，$\vec{x}\times\vec{y}$ 是模为 $|\vec{x}||\vec{y}|\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，且与 $\vec{x}$、$\vec{y}$ 都垂直的一个向量（当右手的 4 个手指从 $\vec{x}$ 方向绕到 $\vec{y}$ 方向时大拇指所指的方向）.

若参照标准的互相垂直的三个单位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，空间向量可以表示为 $\vec{x}=x_1\vec{i}+$

$x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$，$\vec{y}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$，则

$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，

$$\vec{x}\times\vec{y}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

$\vec{x}\times\vec{y}$ 的模可以解释为两个邻边为 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的平行四边形的面积.

三重标量积 $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})=\vec{y}\cdot(\vec{z}\times\vec{x})=\vec{z}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})$，可以解释为以共点的 $\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$ 为边的平行六面体的体积.

当且仅当 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 正交时，$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

E42 空间的直线与平面：空间中过给定点 P（向量为 $\vec{p}$），并以某一给定向量 $\vec{u}$ 为法向量的平面方程为 $(\vec{p}-\vec{x})\cdot\vec{u}=0$.

点 X（向量为 $\vec{x}$）位于通过两给定点 P 与 Q（向量为 $\vec{q}$）的直线上，且满足

$\vec{x}=(1-t)\vec{p}+t\vec{q}$，$t$ 为实数.

当 $0<t<1$ 时，点 X 严格位于 P、Q 之间；线段 PQ 的中点为

$$\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}).$$

另外，若一直线过点 P，且它的方向向量为 $\vec{u}$，则位于直线上的点 X 可以表示为 $\vec{p}+t\vec{u}$，t 为实数.

点 C（向量为 $\vec{c}$）到方程为 $\vec{u}\cdot\vec{x}=k$ 的平面的距离为

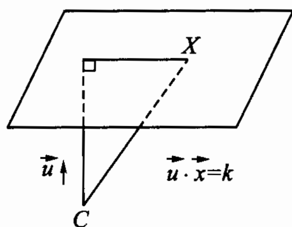
$$\frac{|k-\vec{u}\cdot\vec{c}|}{|\vec{u}|}.$$

这一结论可见图 253（上），其中 X 是平面上的任一点，其向量为 $\vec{x}$，C 为平面外一点，其向量为 $\vec{c}$，$\frac{|(\vec{x}-\vec{c})\cdot\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ 是 $\vec{x}-\vec{c}$ 在方向 $\vec{u}$ 上的投影长度.

点 C 到过点 A（向量为 $\vec{a}$）与 B（向量为 $\vec{b}$）的直线的距离为

$$\frac{|(\vec{a}-\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{c})|}{|\vec{a}-\vec{b}|}.$$

（式中的分子是图 253（下）中阴影区域面积的两倍，分母则是由 A 到 B 的底边的长度.）



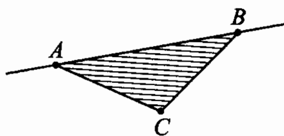


图 253

点 C 到过点 A 且方向为 $\vec{u}$ 的直线的距离为

$$\frac{|(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

过点 A 方向为 $\vec{u}$ 的直线与过点 B、方向为 $\vec{v}$ 的直线之间的垂直距离为

$$\frac{|(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}.$$

这两条直线是异面的，见图 254.

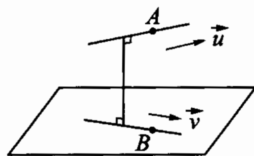


图 254

（这相当于求出 $\vec{a}-\vec{b}$ 在两直线的共同垂直方向 $\vec{u}\times\vec{v}$ 上的投影的长度.）

E43 托勒密不等式：记四边形四边的长度依次为 a、b、c、d，且 u、v 为两条对角线长，则 $ac+bd\geqslant uv$. 当且仅当四边形共圆时等式成立.

E44 圆的面积为 πr^2，其中 r 为圆的半径.

三角形的面积为

$$\frac{1}{2}bh=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

其中 a、b、c 为三边的长，C 为边 c 所对的角，h 为边 b 上高线的长，s 为周长的一半.

E45 记△ABC 中角 A、B、C 所对的三边长分别为 a、b、c，$S_{\triangle}$ 为它的面积，R 为其外接圆半径(过 A、B、C 的外接圆圆心为三角形三边的垂直平分线的交点). 则有

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}.$$

由这些关系可得正弦定理：

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

内切圆位于三角形内，且与各边相切，其圆心为三角形三个内角的平分线的交点，其半径 r 可由

$$2S_{\triangle}=r(a+b+c)$$

确定，其中 $S_{\triangle}$ 为三角形的面积.

E46 记 r 为△ABC 的内切圆半径，r_a、r_b、r_c 为△ABC 的三个旁切圆的半径(例如半径为 r_a 的旁切圆与 BC 从外部相切，且与 AB、AC 的延长线相切). 于是有

$$r=\frac{S_{\triangle}}{s},r_a=\frac{S_{\triangle}}{s-a},r_b=\frac{S_{\triangle}}{s-b},r_c=\frac{S_{\triangle}}{s-c},$$

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=a\sec\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=a\sec\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

其中 $S_{\triangle}$ 为三角形的面积，s 为周长的一半. 还有类似的包含 b、c 的等式.

E47 对任意角 α 与 β，有

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

E48 毕达哥拉斯三元数组：若集合(a,b,c)中的三个数恰好为一直角三角形三边的长，则称其为毕达哥拉斯三元数组. 若 c 为斜边的长，则等价于 $c^2=a^2+b^2$.

若 a、b、c 均为整数，当 a、b、c 的最大公因数为 1 时，称该三元数组为互素的. 所有的互素(整数)毕达哥拉斯三元数组可以用以下的参数形式表示：

$$a=2uv,\ b=u^2-v^2,\ c=u^2+v^2.$$

其中 u 与 v 互素，且有不同的奇偶性，并满足 $u>v$.

F. 数学分析

F1 对数：若 b 与 a 是两个正实数，且 $b\neq1$，则当且仅当 $a=b^x$ 时，$x=\log_b a$ (a 关于底 b 的对数). 关于对数，下列各结论成立：

$$\log_b(uv)=\log_b u+\log_b v,$$

$$\log_b 1=0,\ \log_b b=1.$$

链式法则：

$$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c\quad(a、b、c>0,\ a、b\neq1),$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\quad(a、b>0,\ a、b\neq1).$$

F2 对实数 a、b，有

$$\max(a,b)=\begin{cases}b & (a\leqslant b),\\ a & (b<a);\end{cases}$$

$$\min(a,b)=\begin{cases}a & (a\leqslant b),\\ b & (b<a).\end{cases}$$

F3 差分方程：设 a、b 为两个实数，数列 x_1，x_2，x_3，…，x_n，…满足

$$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}(n=3,4,5,6,\cdots).\qquad(*)$$

方程 $t^2=at+b$ 是(＊)式相对应的特征方程. 若这一方程有两个相异的解 t_1 与 t_2，则

$$x_n=c_1t_1^n+c_2t_2^n \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 c_1、c_2 由下式所确定：

$$x_1=c_1t_1+c_2t_2,\ x_2=c_1t_1^2+c_2t_2^2.$$

另一方面，若该特征方程只有1个解 m（t^2-at-b 的一个重根），则（*）式具有形式

$$x_n=2mx_{n-1}-m^2x_{n-2} \quad (n=3,4,5,6,\cdots).$$

此时

$$x_n=(c_1+c_2n)m^n \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 c_1、c_2 满足

$$x_1=(c_1+c_2)m,x_2=(c_1+2c_2)m^2.$$

例如，斐波那契数列(1,1,2,3,5,…)满足

$$f_1=f_2=1,f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \quad (n\geqslant 3),$$

因而它的特征方程为 $t^2=t+1$，其解为

$$t_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),t_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

因此

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

F4 区间：

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$
$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

F5 欧拉方程：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，其中 θ 是实数，e是自然对数的底. 每一个复数 $z=x+yi$ 可以写成 $re^{i\theta}$ 的形式，其中 $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$.

F6 若 z 与 w 是两个复数，则集合 $\{(1-t)z+tw\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是复平面上联结对应 z 与 w 的点 Z 与 W 的直线段. 若点 V（对应的复数为 v）分联结 Z 与 W 的直线段为比例 $\frac{r}{s}$ $\left(\text{即}\frac{v-z}{w-v}=\frac{r}{s}\right)$，则 $v=\frac{s}{r+s}z+\frac{r}{r+s}w$.

问题索引